РЕКУРРЕНТНОЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СИЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Г. М. Кошкин, И. Г. Пивен

Томский государственный университет, ОПИ ТНЦ СО РАН
Томск, Россия
E-mail: kgm@fpmk.tsu.ru

Рассматривается рекуррентный метод оценивания функционалов от условных распределений при непараметрической неопределенности по наблюдениям, удовлетворяющим условиям сильного перемешивания (с. п.) на основе кусочно-гладких аппроксимаций оценок подстановки, для которых выведены формулы вычисления главных частей асимптотических среднеквадратических отклонений (СКО) с улучшенной скоростью сходимости.

Ключевые слова: условный функционал, непараметрическая неопределенность, сильное перемешивание, рекуррентные ядерные оценки подстановки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Определим класс условных функционалов формулой:

$$J(x) = \int g(y) f(y \mid x) dy = \frac{\int g(y) f(x,y) dy}{p(x)} = \frac{G(x)}{p(x)}, \qquad (1)$$

где $g(\cdot)$ – известная измеримая по Борелю скалярная функция, $f(x,y)$ – неизвестная плотность распределения (п. р.) наблюдаемой двумерной случайной величины $Z = (X,Y) \in R^2$, $p(x)$ – маргинальная п. р. величины X, $f(y \mid x) = \dfrac{f(x,y)}{p(x)}$ – условная п. р., $\int \equiv \int_{R^1}$.

Так, к примеру, условное среднее (функция регрессии) выхода стохастического объекта относительно входа является моделью, минимизирующей СКО между выходами объекта и его модели:

$$r(x) = E(Y \mid X = x) = \int y f(y \mid x) dy = \frac{\int y f(x,y) dy}{p(x)}.$$

При построении модели реального объекта учитываются не все его входы, поэтому возникает погрешность, связанная с упрощением регрессионной модели относительно истинной структуры объекта. Эту погрешность можно измерять остаточной (условной) дисперсией:

$$D(Y \mid x) = \frac{\int y^2 f(x,y)dy}{p(x)} - r^2(x).$$

Уровень сложности объекта характеризуют также и такие его статистические характеристики, как условные коэффициенты асимметрии и эксцесса. В этом случае $g(y) = y^k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Более сложные функции $g(y)$ заданного вида используются, например, при построении оптимальных оценок прогноза (см. гл. 8 в [1]).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При решении различных задач идентификации и управления [2, 3] широкое применение находят последовательные процедуры, которые обладают рядом преимуществ перед обычными процедурами: они, как правило, легко реализуются на компьютерах, экономят при этом машинную память и, что немаловажно, на каждом такте работы алгоритма дают готовый результат.

Рассмотрим рекуррентные непараметрические ядерные оценки подстановки [4, с. 91] условных функционалов *J(x)* в точке x, которые согласно [1, с. 89] имеют вид:

$$J_n(x) = \frac{G_n(x)}{p_n(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{g(Y_i)}{h_i} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right) \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right), \qquad (2)$$

где $$G_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{g(Y_i)}{h_i} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right) = G_{n-1}(x) - \frac{1}{n}\left[G_{n-1}(x) - \frac{g(Y_n)}{h_i} K\left(\frac{x - X_n}{h_i}\right)\right],$$

$$p_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right) = p_{n-1}(x) - \frac{1}{n}\left[p_{n-1}(x) - \frac{1}{h_i} K\left(\frac{x - X_n}{h_i}\right)\right], \qquad Z_i = (X_i, Y_i),$$

$i = \overline{1,n}$ – двумерная выборка, характеризуемая плотностью $f(x,y)$, $K(u)$ – ядерная функция, последовательность чисел $h_n > 0$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Согласно (2) при $g(y) = y$ получаем рекуррентную ядерную оценку регрессии Надарая – Ватсона [5, 6].

Применение оценок типа (2) иногда приводит к нежелательным эффектам. Например, при некоторых значениях параметров модели оценки (2) становятся неустойчивыми, в частности, если $p_n(x) < \varepsilon$ для достаточно малых ε.

Другая проблема состоит в том, что теоретическая возможность равенства $p_n(x) = 0$ (например, когда используются знакопеременные ядра [7], улучшающие в среднеквадратическом скорость сходимости ядерной оценки $J_n(x)$ к функции $J(x)$) не позволяет из-за неустойчивости оценки типа (2) в явном виде сформировать мажорантную последовательность и определить главную часть СКО оценки $J_n(x)$ в соответствии с методами, изложенными в [1, 8, 9].

Возможны следующие варианты решения этих проблем.

1. Ограничить область U, в которой $p(x) > 0$ [10], при исследовании свойств сходимости оценки $J_n(x)$.

2. Наложить на случайную величину $g(Y)$ и ядро $K(u)$ дополнительные условия:

$$|g(Y)| < \infty \ [5], \ \sup_y E[\exp(a|g(Y)|)] < \infty, \ a > 0 \ [11], \ K(u) \ge 0 \ [5, 11].$$

3. Использовать усеченные модификации знаменателя оценки (2) [1, с. 68].

В работе предлагается еще один вариант решения указанных проблем: оценивание функционала (1) при непараметрической неопределенности с помощью кусочно-гладких аппроксимаций оценок (2), для которых можно найти главные части асимптотических СКО с улучшенной скоростью сходимости, причем наблюдения удовлетворяют условиям сильного перемешивания (с. п.). Полученные результаты применены при решении задачи идентификации нелинейной авторегрессии первого порядка.

Результаты работы позволяют также исследовать общие динамические системы, в том числе процессы авторегрессионного типа со свойствами с. п. [1, с. 146].

Отметим, что сходимость с вероятностью 1 для последовательностей с. п. оценок типа (2) исследовалась в [12], но проблема вычисления СКО таких оценок осталась не исследованной. В [11] найдена главная часть асимптотической оптимальной СКО оценки Надарая – Ватсона для последовательностей сильного перемешивания, но с традиционной скоростью сходимости.

3. КУСОЧНО-ГЛАДКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

Представим функционал $J(x)$ в виде

$$J(x) = H(a_1(x), a_0(x)) = a_1(x)/a_0(x). \tag{3}$$

Согласно [1, с. 17] назовем базовыми функционалами функции

$$a_1(x) = \int g(y) f(x,y) dy \quad \text{и} \quad a_0(x) = \int f(x,y) dy = p(x).$$

Для снятия ограничений, приведенных в п. 2, и увеличения устойчивости оценки $J_n(x)$ в области, в которой знаменатель $p_n(x)$ в (2) близок к нулю, применим следующую кусочно-гладкую аппроксимацию (см. [9]) для оценки (2):

$$\tilde{J}_n^{[\nu]}(x) = \frac{J_n(x)}{(1 + \delta_{n,\nu} |J_n(x)|^{\rho})^{\tau}}, \tag{4}$$

где $\tau > 0, \rho > 0, \rho\tau \ge 1$ и $\delta_{n,\nu} = O(h_n^{2\nu} + (nh_n)^{-1}),\ \nu \ge 2$.

В данной работе приводятся условия существования оптимальной скорости сходимости порядка $O(n^{-2\nu/(2\nu+1)})$, $\nu = 2, 4, \ldots$, непараметрической оценки (2) и ее кусочно-гладких аппроксимаций (4) для слабозависимых наблюдений, удовлетворяющих условию с. п., при которых эта скорость является оптимальной и в случае независимых наблюдений (см. [7, 8]). Если $\nu \to \infty$, то эта оптимальная скорость, которая является наилучшей согласно [10], стремится к скорости сходимости $O(n^{-1})$ классических параметрических оценок.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $Z_1, ..., Z_n$ – двумерная выборка объема n из генеральной совокупности, характеризуемой плотностью распределения $f(x,y)$. В качестве непараметрической оценки плотности $p(x) = a_0(x)$ и базового функционала $a_1(x)$ воспользуемся объединенной статистикой следующего вида:

$$a_{nr}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{g^r(Y_i)}{h_i} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right), \quad r = 0, 1, \tag{5}$$

где $K(u)$ – ядро, которое не обязательно обладает характеризационными свойствами плотности (неотрицательность и нормировка на 1), а последовательность чисел $h_n \downarrow 0$.

Оценку (5) при $r = 0$ назовем ядерной рекуррентной оценкой плотности.

Определение 1. Функция $H(z): R^s \to R^1$ *принадлежит классу* $N_{\nu,s}(x)$, если она и все ее частные производные (до ν-го порядка включительно) непрерывны в точке x.

Обозначим: $\sup\limits_{x} = \sup\limits_{x \in R^1}$, $T_j = \int u^j K(u) du, \quad j = 1, 2, ...$

Определение 2. Борелевская функция $K(u)$ *принадлежит классу* нормированных ядер A, если $\sup\limits_{x} |K(u)| < \infty, \quad \int |K(u)| du < \infty, \quad \int K(u) du = 1.$

Определение 3. Борелевская функция $K(u) \in A_\nu$, если $K(u) \in A$, и $K(u)$ удовлетворяет условиям $\int |u^\nu K(u)| du < \infty, \quad T_j = 0, \quad j = 1, ..., \nu - 1.$

Замечание 1. Классу A_2 принадлежат симметричные относительно нуля ядра с характеризационными свойствами плотности и $\int u^2 K(u) du < \infty$, однако ядра $K(u)$ из класса A_ν, $\nu \geq 4$, не являются плотностями, поэтому функция $K(u)$ при некоторых значениях аргумента u будет отрицательной.

Обозначим $a_r^+(x) = \int |g^r(y)| f(x,y) dy$.

Определение 4. Последовательность вещественных чисел $\{h_n\}$ принадлежит классу H, если $(h_n + 1/nh_n) \downarrow 0$, причем

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i^q = S_q h_n^q + o(h_n^q),$$

где q – вещественное число, S_q – некоторая постоянная, не зависящая от n.

Обозначим σ-алгебру, порожденную одномерными случайными величинами $X_s, X_{s+1}, ..., X_t$, через F_s^t.

Определение 5. Строго стационарная последовательность $\{X_j\}_{j \geq 1}$ удолетворяет условию сильного перемешивания, если

$$\sup_{t} \sup_{A \in F_0^t, B \in F_{t+\tau}^\infty} |P(AB) - P(A)P(B)| \le \alpha(\tau) \downarrow 0, \quad \tau \uparrow \infty,$$

$\alpha(\tau)$ – коэффициент с. п. (в знаках: $\{X_j\}_{j\ge1} \in S(\alpha)$).

Замечание 2. В определении 5 под $\{X_j\}_{j\ge1}$ можно подразумевать также последовательность векторов.

Важные примеры с. п. последовательностей можно найти в [13], [1]; отметим только, что с. п. последовательности обычно генерируются динамическими моделями авторегрессионного типа [1].

Положим $z = (x, y)$, $\partial z = \partial x \partial y$, $(Z_1 < z) = (X_1 < x, Y_1 < y)$. Обозначим:

$$a_r^+(x) = \int |g^r(y)| f(x,y)dy; \quad a_{2+\delta}^+(x) = \int |g(y)|^{2+\delta} f(x,y)dy;$$

$$a_{1(1+\tau),rs}^+(x,y) = \iint |g^r(v) g^s(q)| f_{1(1+\tau)}(x,v,y,p)dvdp,$$

где $f_{1(1+\tau)}(z,p) = \dfrac{\partial^4}{\partial z \partial p} P(Z_1 < z, Z_{1+\tau} < p)$ – четырехмерная плотность распределения случайных величин $(Z_1, Z_{1+\tau})$;

$$f_{1(1+i)(1+i+j)(1+i+j+k)}(z,s,u,w) = \frac{\partial^8 \mathrm{P}(Z_1 < z, Z_{1+i} < s, Z_{1+i+j} < u, Z_{1+i+j+k} < w)}{\partial z \partial s \partial u \partial w} -$$

плотность распределения величин

$$(Z_1, Z_{1+i}, Z_{1+i+j}, Z_{1+i+j+k}), \quad a_{1(1+i)(1+i+j)(1+i+j+k),r}^+(x,y,x',y') =$$

$$= \int_{R^8} |g^r(v) g^r(s) g^r(v') g^r(s')| f_{1(1+i)(1+i+j)(1+i+j+k),r}(x,v,y,s,x',v',y',s')dvdsdv'ds',$$

$$a_{1(1+j)(1+j+k),r}^+(x,y,x') = \int_{R^8} |g^r(v) g^r(s) g^r(v')| f_{1(1+j)(1+j+k),r}(x,v,y,s,x',v')dvdsdv'.$$

5. СВОЙСТВА ОЦЕНКИ ПОДСТАНОВКИ УСЛОВНОГО ФУНКЦИОНАЛА $J_n(x)$ И ЕЕ КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ АППРОКСИМАЦИИ $\tilde{J}_n^{[v]}(x)$ ДЛЯ С. П. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Общие формулы СКО. Обозначим

$$L(c) = \int K(u)K(cu)du, \quad c \in R^1, \quad \sigma^2(x) = \frac{L(1)}{p(x)}\left[\int g^2(y) f(y \mid x)dy - J^2(x)\right].$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\{Z_j\}_{j\ge1} \in S(\alpha)$, причем $\int_0^\infty [\alpha(\tau)]^q d\tau < \infty$, $0 < q < 1/2$, $\int_0^\infty \tau^2 [\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau < \infty$, $\delta > 0$;

2) $a_r(z) \in N_{2,1}(x)$, $\sup\limits_x |a_r^{(2)}(x)| < \infty$, $r = 0,1$, $a_2^+(v) \in N_{0,1}(x)$,

$a_{2+\delta}(v) \in N_{0,1}(x)$;

3) $\sup\limits_x |a_r^{(2)}(x)| < \infty$, $p(x) > 0$, $r = 0, 1$, $\sup\limits_x p(x) < \infty$;

4) ядро $K(u) \in A$;

5) последовательность чисел $h_n \in H$;

6) $\sup\limits_x a_r^+(x)$ и для $\tau > 1$ $\sup\limits_x a_{1\tau,rs}^+(x,x)$, $r = 0, 1$;

7) функции $a_{1(1+i)(1+i+j)(1+i+j+k),r}^+(u,v,t,w) \in N_{0,4}(x,x,x,x), i,j,k \geq 1$,

$i + j + k \leq n$,

$a_{1(1+j)(1+j+k),r}^+(u,v,t) \in N_{0,3}(x,x,x)$, $r = 0, 1$, $j,k \geq 1$, $1 + j + k \leq n$;

8) $\int u^2 |K(u)| du < \infty$; 9) $|g(Y)| < \infty$.

Тогда при $n \to \infty$

$$\left| \mathrm{E}(J_n(x) - J(x))^2 - \frac{S_{-1}\sigma^2(x)}{nh_n} - \frac{S_2^2 h_n^4 T_2^2}{(2p(x))^2}\left[(J(x)p(x))^{(2)} - J(x)p^{(2)}(x)\right]^2 \right| = O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right).$$

Асимптотические свойства оценки условного функционала, задаваемой формулой (4), характеризует

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1), 5)–7) теоремы 1 и, кроме того,

2') $a_r(z) \in N_{\nu,1}(x)$, $\sup\limits_x \left|a_r^{(\nu)}(x)\right| < \infty$, $r = 0,1$, $a_2^+(v) \in N_{0,1}(x)$, $a_2(v) \in N_{0,1}(x)$,

$a_{2+\delta}(v) \in N_{0,1}(x)$, $\sup\limits_x a_4^+(x) < \infty$,

3') $\sup\limits_x |a_r^{(\nu)}(x)| < \infty$, $p(x) > 0$, $r = 0, 1$, $\sup\limits_x p(x) < \infty$;

4') ядро $K(u) \in A_\nu$;

8') $\int u^\nu |K(u)| du < \infty$ для некоторого $\nu \in \mathrm{N}^+$;

9') $J(x) \neq 0$ или $\tau \geq 4$, $\tau \in \mathrm{N}^+$.

Тогда при $n \to \infty$

$$\left| \mathrm{E}(\tilde{J}_n^{[\nu]}(x) - J(x))^2 - \frac{S_{-1}\sigma_{[\nu]}^2(x)}{nh_n} - \frac{S_\nu^2 h_n^{2\nu} T_\nu^2}{(p(x)\nu!)^2}\left[(J(x)p(x))^{(\nu)} - J(x)p(x)\right]^2 \right| = O((\delta_{n,[\nu]})^{3/2}).$$

Для улучшения скорости сходимости СКО оценки $\tilde{J}_n^{[\nu]}(x)$ до порядка $O(n^{-2\nu/(2\nu+1)})$ относительно обычной скорости порядка $O(n^{-4/5})$ для $J_n(x)$ (ср. п. 6 в [8]) согласно теореме 2 достаточно выбрать знакопеременные ядра $K(u) \in A_\nu$ для $\nu > 2$. Чтобы применить полученные в теоремах 1 и 2 результаты при конкретной функции $g(\cdot)$ в оценках (2) и (4) для зависимых наблюдений, требуется проверить выполнение условий: $\mathrm{E}(a_n(x)-a(x))^4 = O((nh_n)^{-2})$, $\mathrm{E}(p_n(x)-p(x))^4 = O((nh_n)^{-2})$.

Из результатов теорем 1 и 2 видны следующие преимущества применения кусочно-гладких аппроксимаций оценок перед оценками подстановки:

1. Улучшается скорость сходимости СКО при использовании знакопеременных ядер для кусочно-гладкой аппроксимации $\tilde{J}_n^{[\nu]}(x)$ при $\nu \geq 4$.

2. Снимается ограничительное условие $|g(Y)| < \infty$.

3. СКО для кусочно-гладкой аппроксимации $\tilde{J}_n^{[\nu]}(x)$ вычисляется даже в тех случаях, когда $\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \leq 0$ и $K(u) \leq 0$ на некоторых множествах из R^1 (например, в области определения знакопеременных финитных ядер).

СКО оптимальных оценок. Далее верхний (нижний) индекс $[\nu]$ у величин $h_{nr}^{[\nu]}, a_{nr}^{[\nu]}(x)$ и др., зависящих от $K(u)$, обозначает принадлежность ядра $K(u)$ классу функций A_ν. Введем оптимальную оценку $J_n^{[\nu]}(x;\beta_0^{o[\nu]},\beta_1^{o[\nu]})$ условного функционала $J(x)$, для числителя и знаменателя которой используется свое оптимальное значение параметра $h_{nr}^{o[\nu]} = \beta_r^{o[\nu]} n^{-1/(2\nu+1)}$, $r = 0, 1$, $\beta_r^{o[\nu]} = \left[\dfrac{(1+\nu)L^{[\nu]}(1)a_{2r}(x)}{4(1+2\nu)\nu\left[\omega_r^{(\nu)}(x)\right]^2}\right]^{1/(2\nu+1)}$,

$\omega_r^{(\nu)}(x) = \dfrac{a_r^{(\nu)}(x)}{\nu!}T_\nu$, и соответствующую ей кусочно-гладкую аппроксимацию $\tilde{J}_n^{[\nu]}(x;\beta_0^{o[\nu]},\beta_1^{o[\nu]})$.

Обозначим $\sigma_{[\nu]}^2(x;\beta_0^{o[\nu]},\beta_1^{o[\nu]}) = \dfrac{L^{[\nu]}(1)}{p(x)\beta_1^{o[\nu]}} \int g^2(y) f(y \mid x) dy +$

$$+\frac{J^2(x)}{p(x)}\left[\frac{L^{[\nu]}(1)}{\beta_0^{o[\nu]}} - \left(\frac{L(\beta_0^{[\nu]}/\beta_1^{[\nu]})}{\beta_1^{[\nu]}} + \frac{L(\beta_1^{[\nu]}/\beta_0^{[\nu]})}{\beta_0^{[\nu]}}\right)\right],$$

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2, то при $n \to \infty$

$$n^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}\Bigg|\mathrm{E}(\tilde{J}_n^{[\nu]}(x;\beta_0^{o[\nu]},\beta_1^{o[\nu]}) - J(x))^2 - \sigma_{[\nu]}^2(x;\beta_0^{o[\nu]},\beta_1^{o[\nu]}) -$$

$$-\frac{T_\nu^2}{(p(x)\nu!)^2}\left[(\beta_1^{o[\nu]})^{2\nu}(J(x)p(x))^{(\nu)} - (\beta_0^{o[\nu]})^{2\nu} J(x) p^{(\nu)}(x)\right]^2\Bigg| = O(n^{-\frac{\nu}{2\nu+1}}).$$

Для нерекуррентных оценок, которые являются частным случаем рекуррентных оценок при $h_i = h_n$, полагая $\nu = 2$ и $\beta_0^{o[\nu]} = \beta_1^{o[\nu]} = \beta^{o[\nu]}$ в утверждении теоремы 3, получаем результат Г. Коломба [14], приведенный в [15].

8. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

Пусть случайная последовательность $\{X_t, t = ...,-1, 0, 1, ...\}$ генерируется нелинейной авторегрессией

$$X_t = \psi(X_{t-1}; \alpha_\psi) + \varepsilon_t \tag{6}$$

где $\{\varepsilon_t\}$ – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией $D\varepsilon_t = 1$, ψ – неизвестная функция, такая, что $x, y \in R^1$,

$$|\psi(y + x) - \psi(y)| \le a_\psi \, |x|, \quad 0 < a_\psi < 1, \quad \psi(0) = 0. \tag{7}$$

Условие (7), как показано в [16], обеспечивает стационарность процесса (6); варианты модели типа (6), применяемые в эконометрике, приводятся в [17].

Заметим, что к авторегрессии типа (6) сводится и более сложная модель

$$g(X_t) = \psi(X_{t-1}; a) + \varepsilon_t,$$

когда известная функция $g(\cdot)$ и ее обратная функция $g^{-1}(\cdot)$ являются взаимно однозначными. Действительно, в этом случае, обозначив $Y_t = g(X_t)$, $\Phi(Y_t) = \psi[g^{-1}(Y_t)]$, приходим к модели вида:

$$Y_t = \Phi(Y_{t-1}; a_\Phi) + \varepsilon_t.$$

Пусть $X_0, X_1, ..., X_n$ – выборка, генерируемая процессом (6). Теперь функцию ψ в (6) можно оценить статистикой:

$$\psi_n(x) = \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t}{h_t} K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_t}\right) \Bigg/ \frac{1}{h_t} \sum_{t=1}^{n} K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_t}\right), \tag{8}$$

которая по структуре аналогична рекуррентной регрессионной оценке Надарая – Ватсона, или ее кусочно-гладкой аппроксимацией:

$$\tilde{\psi}_n^{[\nu]}(x) = \frac{\psi_n(x)}{(1 + \delta_{n,\nu} \, |\psi_n(x)|^\tau)^\rho}. \tag{9}$$

Нерекуррентные оценки типа (9) исследовались в работах [18–20]. Свойства их сходимости в среднеквадратическом анонсировались в [21–23] и изучались в [24].

Оценка условной дисперсии, характеризующей качество приближений (8) и (9) к функции ψ нелинейной авторегрессионной модели (6), выражается формулой:

$$D_n = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} \frac{X_t^2}{h_t} K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_t}\right)}{\sum\limits_{t=1}^{n} \frac{1}{h_t} K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_t}\right)} - \frac{\left[\sum\limits_{t=1}^{n} \frac{X_t}{h_t} K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_t}\right)\right]^2}{\left[\sum\limits_{t=1}^{n} \frac{1}{h_t} K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_t}\right)\right]^2}. \qquad (10)$$

Если φ – плотность распределения случайной величины ε_t, $C < \infty$ и для любого $\Delta > 0$ $\int |\varphi(x + \Delta) - \varphi(x)|\, dx \le C|\Delta|$, то процесс нелинейной авторегрессии X_t согласно [25] удовлетворяет условию с. п.: для любого $\tau > 0$

$$\alpha(\tau) \le C(a_\varphi) e^{-\delta(a_\varphi)\tau}, \quad C(a_\varphi) < \infty, \quad -\delta(a_\psi) > 0. \qquad (11)$$

Учитывая (11), нетрудно переформулировать все результаты данной работы для оценок (8), (10) и их кусочно-гладких аппроксимаций типа (9). Например, главная часть дисперсии оценки условной дисперсии (10) при выполнении условий теоремы 1 (при $g(y) = y^2$ и $g(y) = y$) выражается формулой:

$$\frac{L(1)}{n h_n p^6(x)} \int \left[y^2 p^2(x) - 2y a_1(x) p^2(x) - a_2(x) p(x) + 2a_1(x)\right]^2 f(x, y) dy.$$

Полученные результаты позволяют также исследовать общие динамические системы, в том числе процессы авторегрессионного типа со свойствами сильного перемешивания [1, с. 244]. Из областей современной математики, где открываются возможности применения результатов исследований с. п. последовательностей, представляет интерес теория одномерных конечных автоматов [26].

Доказательства теорем 1–3 для нерекуррентных оценок, т. е. при $h_i = h_n$, приведены в [24, 27].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Добровидов А. В., Кошкин Г. М.* Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Наука. Физматлит, 1977.

2. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972.

3. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.

4. *Боровков А. А.* Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997.

5. *Надарая Э. А.* Об оценке регрессии // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 19. Вып. 1. С. 147–149.

6. *Watson G. S.* Smooth regression analysis // Sankhya. Indian J. Statist. 1964. V. A 26. P. 359–372.

7. *Gasser T., Muller H.-G.* Kernel Estimation of Regression Functions // Lect. Notes Math. V. 757. P. 23–68.

8. *Кошкин Г. М.* Асимптотические свойства функций от статистик и их применения к непараметрическому оцениванию // Автоматика и телемеханика. 1990. № 3. С. 82–97.

9. *Кошкин Г. М.* Моменты отклонений оценки подстановки и ее кусочно-гладких аппроксимаций // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 3. С. 605–618.

10. *Алексеев В. Г.* О непараметрических оценках кривых и поверхностей регрессии // Автоматика и телемеханика. 1988. № 7. С. 81–87.

11. *Bosq D., Cheze-Payaud N.* Optimal Asymptotic Quadratic Error of Nonparametric Regression Function Estimates for a Continuous-Time Process from Sampled-Data // Statistics. 1999. V. 32. P. 229–247.

12. *Masry E.* Nonparametric Estimation of Conditional Probability Densities and Expectations of Stationary Processes: Strong Consistancy and Rates // Stochastic Processes and Apll. 1989. V. 32. N. 1. P. 109–127.

13. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

14. *Collomb G.* Estimation non parametrique de la regression par la metode du noyau: These Docteur Ingenieur. Toulouse: Univ. Paul-Sabatier, 1976.

15. *Цыбаков А. Б.* О выборе ширины окна в ядерной непараметрической регрессии // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32. Вып. 1. С. 153–159.

16. *Балтрунас Й. Й., Рудзкене В. Ю.* Нелинейные стохастические процессы авторегрессии // Тр. АН ЛитССР. Сер. Б. 1984. Т.3(142). С. 81–90.

17. *Neumann M. H., Kreiss J.-P.* Regression-Type Inference in Nonparametric Autoregression // Ann. Statist. Ann. Statist. 1998. V. 26. N. 4. P. 1570–1613.

18. *Masry E., Tjostheim D.* Nonparametric Estimation and Identification of Nonlinear ARCH Time Series // Econometric Theory. 1995. V. 11. P.258–289.

19. *Robinson P. M.* Nonparametric Estimation from Time Series Residuals // Cah. Cent. etud. rech. oper., 1986. V. 28. N. 1–3. P.197–202.

20. *Tjostheim D.* Non-Linear Time Series: a Selective Review // Scand. J. Statist. 1994. V. 21. P. 97–130.

21. *Кошкин Г. М., Пивен И. Г.* К оцениванию условных функционалов сильно перемешанных последовательностей в условиях непараметрической неопределенности // Вестн. ТГУ. Приложение. 2003. № 6. С. 272–276.

22. *Kitaeva A. V., Koshkin G. M., Piven I. G., Ryumkin V. I.* Nonparametric Identification of Dynamic Systems // Проблемы синтеза и проектирования систем автоматического управления. Материалы науч.-практ. семинара. Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2001. С.97–100.

23. *Kitaeva A. V., Koshkin G. M., Piven I. G., Ryumkin V. I.* On Nonparametric Kernel Identification of Nonlinear Autoregression Process // The 5th Korea-Russian International Symposium on Science and Technology. Proceedings. KORUS 2001. Tomsk: Tomsk Polytechnic University. 2001. V. 2. P.208–211.

24. *Кошкин Г. М., Пивен И. Г.* Непараметрическое оценивание функционалов от условных распределений последовательностей сильного перемешивания // Вестн. ТГУ. 2003. № 280. С.187–200.

25. *Балтрунас Й. Й., Рудзкене В. Ю.* Регулярность процесса нелинейной авторегрессии // Тр. АН ЛитССР. Сер. Б. 1986. Т. 2(153). С.118–122.

26. *Kleveland Rune.* Mixing Properties of Onedimensional Cellular Automata // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. N. 6. P. 1755–1766.

27. *Васильев В. А., Добровидов А. В., Кошкин Г. М.* Непараметрическое оценивание функционалов от распределений стационарных последовательностей. М.: Наука, 2004.