# АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ТЕСТА ВАЛЬДА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРАХ ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИИ

**Д. В. Кишилов**

*Белорусский государственный университет*
*Минск, Беларусь*
*E-mail: dmitry-kishilov@mail.ru*

В данной работе предложен подход, позволяющий вычислять оценки характеристик последовательного теста Вальда для проверки двух простых гипотез о параметрах авторегрессии первого порядка при наличии в наблюдаемой последовательности искажений вида Тьюки – Хьюбера. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

*Ключевые слова*: последовательный тест, авторегрессия, вероятности ошибок, средняя длина последовательности, искажения, устойчивость.

## ВВЕДЕНИЕ

Последовательная статистическая проверка гипотез успешно применяется в экономике, медицине, контроле качества и других приложениях. Основным преимуществом последовательных тестов является то, что для принятия решения с заданной точностью они требуют в среднем меньше наблюдений, чем классические методы с фиксированной длиной последовательности (см. [1], [2]).

Для корректного использования последовательных тестов на практике при заданных параметрах необходимо уметь вычислять их основные характеристики: вероятности ошибок первого и второго рода и условные средние длины наблюдаемой последовательности. Кроме того, важно исследовать их поведение при наличии искажений в гипотетической модели данных, поскольку такие искажения могут привести к существенному ухудшению характеристик [6]. В работе [3] для дискретной марковской модели наблюдений, удовлетворяющей условию «соизмеримости» вероятностей, получены точные выражения для указанных характеристик теста Вальда, а также исследована его робастность (устойчивость) при наличии «выбросов» в наблюдениях. В [4] предложен подход, позволяющий вычислять оценки характеристик теста Вальда для независимых наблюдений с абсолютно непрерывным распределением вероятностей. В данной работе подход из [4] применен для вычисления приближенных значений указанных выше характеристик последовательного теста в случае, когда наблюдается процесс авторегрессии первого порядка при наличии «выбросов» типа Тьюки – Хьюбера [5]. Приводятся результаты имитационного моделирования, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

## 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПОСТРОЕНИЕ ТЕСТА

Пусть наблюдается последовательность $x_1, x_2, \ldots$, удовлетворяющая уравнению авторегрессии первого порядка:

$$\begin{aligned} x_n &= a x_{n-1} + \omega_n, n \geq 1, \\ x_0 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\omega_n$ – процесс белого шума с функцией распределения вероятностей $P(x)$, $E\{\omega_n\} = 0$, $E\{\omega_n^2\} = \sigma^2$.

Пусть проверяется гипотеза $H_0 : a = a_0, P(\cdot) = P_0(\cdot)$, относительно гипотезы $H_1 : a = a_1, P(\cdot) = P_1(\cdot)$, где $P_0(\cdot), P_1(\cdot)$ – некоторые функции распределения вероятностей с плотностями распределения вероятностей $p_0(\cdot)$, $p_1(\cdot)$. Для проверки гипотез $H_0$, $H_1$ может быть использован последовательный критерий отношения вероятностей, предложенный Вальдом. Обозначим

$$\lambda(x, y) = \log \frac{p_1(y - a_1 x)}{p_0(y - a_0 x)}, \tag{2}$$

$$\Lambda_n = \Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t=1}^{n} \lambda(x_{t-1}, x_t). \tag{3}$$

В соответствии с тестом Вальда, после $n$ наблюдений ($n$ = 1, 2, …) принимается решение

$$d_n = 1_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_n) + 2 \cdot 1_{(C_-, C_+)}(\Lambda_n), \tag{4}$$

где $1_A(\cdot)$ – индикаторная функция множества $A$. Значения $d_n = 0$ и $d_n = 1$ означают остановку процесса наблюдения и принятие гипотезы $H_0$ и $H_1$ соответственно. Решение $d_n = 2$ означает, что необходимо произвести ($n$+1)-ое наблюдение. Параметры $C_-, C_+ \in R$, $C_- < 0 < C_+$, которые называются порогами теста, согласно [1] рекомендуется задавать следующим образом:

$$C_+ = \log \frac{1 - \beta_0}{\alpha_0}, \; C_- = \log \frac{\beta_0}{1 - \alpha_0}, \tag{5}$$

где $\alpha_0$, $\beta_0$ – максимально допустимые вероятности ошибок первого и второго рода для теста (4).

Пусть гипотетическая модель (1) подвержена «выбросам» Тьюки – Хьюбера [5], то есть фактическое распределение вероятностей процесса $\omega_n$ при истинной гипотезе $H_k$ имеет вид:

$$\overline{P}_k(\omega) = (1 - \varepsilon_k) P_k(\omega) + \varepsilon_k \widetilde{P}(\omega), \; \omega \in R, k = 0,1, \tag{6}$$

где $\varepsilon_k$ – вероятность появления «выброса», $\widetilde{P}_k(\cdot) \neq P_k(\cdot)$ – некоторое «засоряющее» распределение вероятностей, отличающееся от гипотетического значением дисперсии: $\int \omega d\widetilde{P}(\omega) = 0$, $\int \omega^2 d\widetilde{P}(\omega) = \widetilde{\sigma}_k^2 < \infty$.

## 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЦЕНОК ХАРАКТЕРИСТИК ТЕСТА

Для вычисления оценок условных вероятностей ошибок теста (4) и средних длин последовательности при искажениях вида (6) воспользуемся методом укрупнения состояний [4].

Выберем параметры аппроксимации $x_{\min}, x_{\max} \in R$, $x_{\min} < x_{\max}$, $m \in N$. Положим $\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}$, $X_i = x_{\min} + (i - 0.5)\Delta$, $i = \overline{1,m}$. Рассмотрим последовательность случайных величин $\widetilde{x}_n$: $\widetilde{x}_0 = 0$, $\widetilde{x}_n = f(a\widetilde{x}_{n-1} + \omega_n)$, где функция $f(x): R \to R$ задается соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} X_1, & x < x_{\min} \\ X_m, & x \ge x_{\max} \\ X_i, & x \in [x_{\min} + (i-1)\Delta, x_{\min} + i\Delta), i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

В асимптотике $x_{\max} \to +\infty$, $x_{\max} \to -\infty$, $\Delta \to 0$ последовательность $\widetilde{x}_n$ будет некоторым образом приближать исходную последовательность $x_n$. Обозначим множество $X = \{X_i, i = \overline{1,m}\}$.

Далеė построим функцию $\widetilde{\lambda}: X \times X \to R$, удовлетворяющую условиям:

$$\exists b \in R,\ \widetilde{\lambda}(X_i, X_j) = m_{ij} b,\ \widetilde{\lambda}(0, X_i) = m_i b,\ m_{ij}, m_i \in Z, \forall i, j \in \{1, \dots, m\},$$

$$\max_{X_i, X_j \in X} \left| \lambda(X_i, X_j) - \widetilde{\lambda}(X_i, X_j) \right| < \delta,$$

где $\delta$ – параметр аппроксимации. Это всегда можно сделать, выбрав $b$ достаточно малым. Обозначим $\widetilde{\Lambda}_n = \sum_{t=1}^{n} \widetilde{\lambda}(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t)$, $\widetilde{C}_- = [C_- / b]$, $\widetilde{C}_+ = [C_+ / b]$. При $\delta \to 0$ последовательность $\widetilde{\Lambda}_n$ будет аппроксимировать последовательность $\Lambda_n$, и, следовательно, характеристики теста

$$\widetilde{d}_n = 1_{[\widetilde{C}_+ b, +\infty)}(\widetilde{\Lambda}_n) + 2 \cdot 1_{(\widetilde{C}_- b, \widetilde{C}_+ b)}(\widetilde{\Lambda}_n) \quad (7)$$

будут приближенно равны характеристикам теста (4).

Для вычисления вероятностей ошибок первого и второго рода и условных средних длин последовательности для теста (7) воспользуемся результатами, полученными в [3]. Будем обозначать $\delta(i, j)$ –символ Кронекера, $1(\cdot)$ – функцию единичного скачка, $\mathbf{I}_k$ – единичную матрицу порядка $k$, $\mathbf{1}_k$ – $k$-вектор-столбец, все компоненты которого равны 1. Для $k = 0,1$ обозначим

$$p_{ij}{}^{(k)} = \begin{cases} 1 - \overline{P}_k(X_m - 0.5\Delta - a_k X_i), & j = m, \\ \overline{P}_k(X_1 + 0.5\Delta - a_k X_i), & j = 1, \\ \overline{P}_k(X_1 + 0.5\Delta - a_k X_i) - \overline{P}_k(X_1 - 0.5\Delta - a_k X_i), & i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{2, \dots m-1\}. \end{cases}$$

$$p_i^{(k)}=\begin{cases}1-\overline{P}_k(X_m-0.5\Delta), & j=m,\\ \overline{P}_k(X_1+0.5\Delta), & j=1,\\ \overline{P}_k(X_1+0.5\Delta)-\overline{P}_k(X_1-0.5\Delta), & i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{2,\dots m-1\}.\end{cases}$$

Определим $m(\widetilde{C}_+-\widetilde{C}_--1)\times 2$-матрицу $R^{(k)}=(r_{ij})$, и $m(\widetilde{C}_+-\widetilde{C}_--1)\times m(\widetilde{C}_+-\widetilde{C}_--1)$ матрицу $Q^{(k)}=(q_{ij})$, $k=0{,}1$, соотношениями:

$$q_{mi+s\,mj+t}=\delta(j-i,m_{st})p_{st}{}^{(k)}, i,j\in(\widetilde{C}_-,\widetilde{C}_+), s,t\in\{1,\dots,m\},$$

$$r_{mi+s\,mj}{}^{(k)}=\begin{cases}\sum\limits_{t=1}^{m}1(i+m_{st}-\widetilde{C}_+)p_{st}{}^{(k)}, & j=\widetilde{C}_+, i\in(\widetilde{C}_-,\widetilde{C}_+), s\in\{1,\dots,m\},\\ \sum\limits_{t=1}^{m}1(\widetilde{C}_--i-m_{st})p_{st}{}^{(k)}, & j=\widetilde{C}_-, i\in(\widetilde{C}_-,\widetilde{C}_+), s\in\{1,\dots,m\}.\end{cases}$$

Зададим $m(\widetilde{C}_+-\widetilde{C}_--1)$-вектор $\pi^{(k)}=\{\pi_i{}^{(k)}\}$ поэлементно:

$$\pi_{mi+s}^{(k)}=\delta(i,m_s)p_s^{(k)},\ i\in(\widetilde{C}_-,\widetilde{C}_+), s\in\{1,\dots,m\}$$

и положим

$$\pi_{m\widetilde{C}_-}^{(k)}=\sum_{s=1}^{m}1(\widetilde{C}_--m_s)p_s^{(k)},\ \pi_{m\widetilde{C}_+}^{(k)}=\sum_{s=1}^{m}1(m_s-\widetilde{C}_+)p_s^{(k)}.$$

Пусть $\widetilde{t}^{(k)}$ – ожидаемая длина наблюдаемой последовательности до момента принятия одной из гипотез при условии, что справедлива гипотеза $H_k$; $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ – вероятности ошибок первого и второго рода для теста (7). Обозначим матрицы $S^{(k)}=\mathbf{I}_{m(\widetilde{C}_+-\widetilde{C}_--1)}-Q^{(k)}$, $B^{(k)}=(S^{(k)})^{-1}R^{(k)}$. Пусть $W_{(i)}$ означает $i$-й столбец матрицы $W$.

**Теорема**. Если имеет место модель (1), причем $\left|S^{(k)}\right|\neq 0$, $k\in\{0,1\}$, то для характеристик последовательного теста (7) справедливы соотношения:

$$\widetilde{\alpha}=(\pi^{(0)})'B_{(2)}^{(0)}+\pi_{m\widetilde{C}_+}^{(0)},\ \widetilde{\beta}=(\pi^{(1)})'B_{(1)}^{(1)}+\pi_{m\widetilde{C}_-}^{(1)},\tag{8}$$

$$\widetilde{t}^{(k)}=(\pi^{(k)})'(S^{(k)})^{-1}\mathbf{1}_{m(\widetilde{C}_+-\widetilde{C}_--1)}+1.\tag{9}$$

При выборе параметров аппроксимации необходимо учитывать, что с ростом $m$ и уменьшением $\delta$ точность увеличится, но будет расти размерность матриц $B^{(k)}$, $S^{(k)}$, что может потребовать значительных ресурсов для вычисления характеристик теста.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для иллюстрации точности приближений (8), (9) характеристик последовательного теста (4) при искажениях вида (6) было проведено имитационное моделирование. Вычислительные эксперименты проводились для следующего частного случая: $a_0 = 0{,}2$, $a_1 = -0{,}2$, $P_0 = P_1 = N(0,\sigma)$, $\widetilde{P}_0 = \widetilde{P}_1 = N(0,\widetilde{\sigma})$, $\sigma = 1$, $\widetilde{\sigma} = 10$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon$. Параметры аппроксимации были следующими: $\delta = 0{,}05$, $\Delta = 0{,}6$, $x_{\max} = -x_{\min} = \left\lceil \dfrac{\sigma_x}{\Delta} \right\rceil \Delta$, где $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{(1-\varepsilon)\sigma^2 + \varepsilon\widetilde{\sigma}^2}{1-a_0{}^2}}$. Пороги теста задавались по формулам (5). Для шести пар значений $\alpha_0$, $\beta_0$ с помощью метода Монте-Карло были получены оценки вероятностей ошибок $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, и условных средних длин последовательности $\hat{t}^{(0)}$, $\hat{t}^{(1)}$. Количество экспериментов для каждого набора параметров составило $N = 20\,000$. Для тех же значений $\alpha_0$, $\beta_0$ по формулам (8), (9) были вычислены оценки $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{t}^{(0)}$, $\widetilde{t}^{(1)}$. В таблице приведены результаты вычислительных экспериментов для двух случаев: когда искажения отсутствовали ($\varepsilon = 0$), и когда вероятность появления «выброса» составляла $\varepsilon = 0{,}1$.

**Результаты численных экспериментов**

| $\alpha_0$ | $\beta_0$ | $\hat{\alpha}$ | $\widetilde{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\widetilde{\beta}$ | $\hat{t}^{(0)}$ | $\widetilde{t}^{(0)}$ | $\hat{t}^{(1)}$ | $\widetilde{t}^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon = 0$ | | | | | | | | | |
| 0,01 | 0,01 | 0,0069 | 0,0072 | 0,0071 | 0,0072 | 62,45 | 62,17 | 61,89 | 62,17 |
| 0,01 | 0,05 | 0,0069 | 0,0070 | 0,0357 | 0,0363 | 43,57 | 42,88 | 59,20 | 59,41 |
| 0,01 | 0,1 | 0,0067 | 0,0075 | 0,0652 | 0,0736 | 34,69 | 34,36 | 55,43 | 55,20 |
| 0,05 | 0,05 | 0,0368 | 0,0370 | 0,0368 | 0,0370 | 40,64 | 40,05 | 40,34 | 40,05 |
| 0,05 | 0,1 | 0,0368 | 0,0375 | 0,0735 | 0,0713 | 32,08 | 32,39 | 37,13 | 37,33 |
| 0,1 | 0,1 | 0,0741 | 0,0756 | 0,0734 | 0,0756 | 29,68 | 29,23 | 29,63 | 29,23 |
| $\varepsilon = 0{,}1$ | | | | | | | | | |
| 0,01 | 0,01 | 0,0491 | 0,0442 | 0,0456 | 0,0442 | 37,64 | 39,92 | 37,13 | 39,92 |
| 0,01 | 0,05 | 0,0437 | 0,0398 | 0,1085 | 0,1045 | 27,15 | 28,57 | 34,05 | 36,44 |
| 0,01 | 0,1 | 0,0427 | 0,0384 | 0,1584 | 0,1573 | 22,74 | 23,45 | 31,43 | 33,17 |
| 0,05 | 0,05 | 0,1027 | 0,0979 | 0,1038 | 0,0979 | 24,71 | 25,58 | 24,59 | 25,58 |
| 0,05 | 0,1 | 0,093 | 0,0936 | 0,1477 | 0,1446 | 20,32 | 21,25 | 22,84 | 23,50 |
| 0,1 | 0,1 | 0,1423 | 0,1427 | 0,1466 | 0,1427 | 18,63 | 19,00 | 18,66 | 19,00 |

На основании данных результатов можно сделать вывод, что оценки (8), (9) обеспечивают высокую точность даже при достаточно грубой аппроксимации исходной последовательности и могут быть в дальнейшем использованы для количественного анализа робастности и построения новых робастных тестов. Данный подход может быть использован и для случаев различения авторегрессионных последовательностей более высокого порядка. Кроме того, сравнение результатов, полученных при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 0{,}1$, позволяет сделать вывод об отсутствии у теста (4) робастности к искажениям вида (5).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Вальд А.* Последовательный анализ. М., 1960.
2. *Siegmund D.* Sequential analysis. Tests and confidence intervals. New York, 1985.
3. *Kharin A., Kishilov D.* Sequential testing of simple hypotheses on parameters of Markov chains // Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition and Information Processing. Minsk, 2003. P. 123–127.
4. *Харин А.* Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. 2002. № 1. С. 92–96.
5. *Huber P.* Robust Statistics. New York: Wiley, 1981.
6. Pham Xuan Quang Robust Sequential Testing // Annals of Statistics. 1985. V. 13. N. 2. P. 838–849.