СХОДИМОСТИ И СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Н. А. Карпиевич

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: ankarpievich@tut.by

Приводятся в явном виде условия сходимости в среднем квадратическом и почти наверное линейных адаптивных алгоритмов при коррелированных наблюдениях. При этом допускается, что и сами точки, в которых производятся наблюдения могут интерпретироваться как случайные. Приводятся оценки скорости сходимости.

Работа является непосредственным продолжением исследований, проведенных в [9].

Конкретно изучается сходимость в среднем квадратическом и почти наверное адаптивного алгоритма

$$c_n = c_{n-1} + \gamma_n \varphi(x_n)[y_n - \varphi^t(x_n)c_{n-1}], \tag{1}$$

который, в частности, можно рассматривать как обучающийся алгоритм оценивания вектора неизвестных параметров $c \in R^m$ при квадратичном критерии качества для модели

$$y_n = \varphi^t(x_n) \tag{2}$$

по результатам наблюдений y_n над независимой переменной y в точках x_n. При этом

$$y_n = \varphi^t(x_n)c + \xi_n, \tag{3}$$

где $x_n \in R^k$ точки в которых производятся наблюдения, $\varphi(x) \in R^m$ заданный базисный вектор-столбец, ξ_n – последовательность случайных величин, характеризующая помехи (ошибки наблюдений), влияние несущественных факторов, γ_n – числовая последовательность. Последнее предложение связано только с целью упрощения формулировок и доказательств (обычно γ_n – это матрица). Кроме того, допускается, что и сами точки x_n случайны.

Алгоритм (1) относится к так называемым алгоритмам типа стохастической аппроксимации (ТСА-алгоритмом). Подобные алгоритмы исследовались в общем случае многими авторами [см., например, [1]–[6] и библиографию к ним]. Однако имеющиеся признаки сходимости из-за общности задачи в основном сложны и заданы в неявном виде, что существенно затрудняет их применение к алгоритмам конкретного вида. Причем основное предположение этих работ – некоррелированность выборки. Вопросы же сходимости ТСА – алгоритмов при коррелированных выборках мало изучены. Один из первых результатов получен в работе [5]. Данная работа является непосредственным ее расширением на векторный случай.

Прежде чем приступить к формулировкам основных результатов введем следующие ограничения на параметры алгоритма (1):

а) $\{ x_n \}$ – последовательность независимых случайных векторов;

б) $\{ \xi_n \}$ – последовательность коррелированных между собой случайных величин, независящих от $\{ \varphi(x_n) \}$, с корреляционной функцией

$$M(\xi_n \xi_k) = \rho(n,k), M\xi_n = 0.$$

Кроме того, введем обозначения

$$u_n = c_n - c, \varphi(x_n) = \varphi_n, B_n = \varphi_n \varphi^t,$$

$$A_n = I - \gamma_n B_n, \|\varphi\|^2 = \varphi^t \varphi,$$

λ_n – наименьшее собственное число матрицы

$$F_n = M[(2 - \gamma_n \|\varphi\|^2) B_n].$$

В работе [9] получены достаточные условия сходимости в среднем квадратическом и почти наверное алгоритма (1). Поэтому сначала рассмотрим вопрос о скорости сходимости.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Если выполнены условия а) и б) и, кроме того:

$$F_n > 0; M\|\varphi_n\|^4 < \infty, \lambda_n \geq \lambda > 0, \tag{4}$$

$$\gamma_n \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty; \tag{5}$$

$$\frac{\rho(n,s)}{\rho(n-1,s)} \leq \rho < 1, \rho(n,n) < \infty, \tag{6}$$

то имеет место оценка

$$M\|c_n - c\|^2 \leq \prod_{k=1}^{n} (1 - \gamma_k \lambda) \quad M\|c_0 - c\|^2 + k \sum_{s=1}^{n} \gamma_s^2 \prod_{k=s+1}^{n} (1 - \lambda \gamma_k). \tag{7}$$

При этом если для любого n $\quad \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\gamma_{n+1}} - \frac{1}{\gamma_n}\right) \leq \gamma < 1, \qquad (8)$

то $\qquad M\|c_n - c\|^2 = 0(\gamma_n); \qquad (9)$

а если $\qquad \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\gamma_{n+1}} - \frac{1}{\gamma_n}\right) \geq \beta > 1, \qquad (10)$

то $\qquad M\|c_n - c_0\|^2 = 0\left(\prod_{s=1}^{n} (1 - \gamma_s \lambda)\right) \qquad (11)$

Доказательство. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 2 [9] можно получить оценку

$$V_n \le (1-\gamma_n\lambda)V_{n-1} + 2\gamma_n M\|\varphi_n\|\sum_{s=1}^{n-1}\gamma_s\beta_n(n-1,s)\rho(n,s)M\|\varphi_s\| + \gamma_n{}^2\rho(n,n)M\|\varphi_n\|^2, \quad (12)$$

где по обозначению $V_n = M\|c_n - c\|^{\,2}$, $\beta(n,s) = \prod_{k=s+1}^{n}(1-\gamma_k\lambda)$.

Условие (6) обеспечивает выполнение условий леммы из [9], а значит в силу этой леммы второе слагаемое в неравенстве (12) величина порядка γ_n^2. В итоге из (12) получаем неравенство вида

$$V_n \le (1-\gamma_n\lambda)V_{n-1} + k\gamma^2{}_n, \quad (13)$$

которая очевидно и влечет за собой оценку (7). Остальные утверждения теоремы следуют непосредственно из неравенства (13) и леммы 2 [4].

Заметим далее, что так же, как и при доказательстве леммы Сакса [1], можно показать, что при условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\gamma_s^2\prod_{k=s+1}^{n}(1-\lambda\gamma_r) = \frac{1}{\lambda}\lim\gamma_n .$$

Поэтому оценка (7) фактически имеет вид

$$M\|c_n - c\|^{\,2} \le \Big(\prod_{k=1}^{n}(1-\gamma_k\lambda)\Big)M\|c_0 - c\|^2 + k_1\gamma_n \quad (14)$$

и скорость сходимости к нулю определяется слагаемыми из неравенства (14), имеющим меньшую скорость убывания. Условия (8) и (10), как показывает анализ доказательства леммы 2 [4] и выделяют те ситуации, когда удается четко разграничить порядок слагаемых в оценке (14). В остальных же случаях упростить оценку (14) без привлечения дополнительных ограничений на свойства γ_n невозможно из-за сложности оценки величины $\prod_{k=1}^{n}(1-\gamma_k\lambda)$.

Отметим также, что в формулировках приведенных утверждений требования о выполнении ограничений при всех n можно было заменить их выполнением для $n \ge n_0$, где n_0 – некоторое фиксированное число.

Рассмотрим далее случай, когда $\{x_n\}$ детерминированная последовательность. Использовать теоремы 1 и 2 из [9] теперь невозможно, так как условие

$$F_n = (2-\gamma_n\|\varphi_n\|^2)B_n > 0, B_n > 0, B_n = \varphi_n\varphi_n^t$$

не выполнено, а значит использовать оценку $\|A_n\| \le 1-\gamma_n\|\varphi_n\|^2\lambda_n$, где $\lambda_n > 0$ минимальное собственное число матрицы F_n, $\|\varphi_n\|^2 = \varphi_n\varphi_n^t$.

В то же время, если ввести норму вектора по другому, например, положить $\|\varphi_n\| = \max_{1\le i\le m}|\varphi_{n,i}|$, то норма матрицы A_n определяется по правилу $\|A_n\| = \max_{1\le i\le m}\sum_{k=1}^{m}|a_{ik}|$.

В итоге соответствующим выбором управляющего параметра γ_n при ограниченных $\|\varphi_n\|$ всегда можно добиться выполнения условия

$$\|A_n\| \le (1 - a\gamma_n \|\varphi_n\|^2) > 0\,, \tag{15}$$

если только $\gamma_n \to 0$.

В данной ситуации мы понимали норму как скалярное произведение, т. е. $\|\varphi_n\|^2 = \varphi_n \varphi_n^t$. Поэтому будем предполагать в дальнейшем, что γ_n и φ_n таковы, что выполнено условие (15).

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 2. Если $\{x_n\}$ детерминированная последовательность, $a \le \|\varphi_n\| \le b$, и выполнены условия

$$\left|\frac{\rho(n,s)}{\rho(n-1,s)}\right| \le \rho < 1, |\rho(n,s)| < \infty. \tag{16}$$

$$\gamma_n \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, \tag{17}$$

то $M\|c_n - c\|^{\,2} \to 0$.

Если к тому же
$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2{}_n < \infty, \tag{18}$$

то $\|c_n - c\|^{\,2} \xrightarrow{п.н.} 0$.

Доказательство. Из представления

$$u_n = c_n - c = w(n,0)u_0 + \sum_{s=1}^{n} w(n,s)\varphi_s \gamma_s \xi_s,$$

следует $u_n^t u_n = u_0^t w^t(n,0) w(n,0) u_0 + 2u_0^t w^t(n,0) \sum_{s=1}^{n} w(u,s)\varphi_s \gamma_s \xi_s + \left\| \sum_{s=1}^{n} \gamma_s w(n,s) \varphi_s \xi_s \right\|^2$.

Откуда для начального значения u_0, не зависящего от $\{\xi_n\}$, следует неравенство

$$V_n \le \|w(n,0)\|^2 V_0 + \sum_{s=1}^{n} \gamma^2{}_s \|w(n,s)\|^2 \rho(s,s) \|\varphi_s\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} \gamma_k \gamma_s \|\varphi_k\| \|\varphi_s\| \|w(n,k)\| \|w(n,s)\| |\rho(k,s)|,$$

где
$$V_n = M\|u_n\|\ .$$

Заметим далее, что при условии (15) справедлива оценка $\|w(n,s)\| \le \prod_{k=s+1}^{n} (1 - \gamma_k a_k \|\varphi_k\|^2) = B(n,s)$, где $1 - \gamma_k a_k \|\varphi_k\|^2 > 0, B(n,n) = 1$.

В итоге получим оценку

$$V_n \le B(n,0)V_0 + b^2 \rho \sum_{k=1}^{n} \gamma^2{}_k B^2(n,k) + 2b^2 \sum_{k=1}^{2n} \gamma_k B^2(n,k) \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_s B(k,s) |\rho(k,s)|. \tag{19}$$

Второе слагаемое в оценке (19) имеет по лемме из [1; стр.215] порядок $0(\gamma_n)$, так как ряд $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k B(n,k)$ расходится.

Аналогично по той же лемме внутренняя сумма третьего слагаемого из (19) имеет порядок $0(\gamma_n)$. Поэтому и это слагаемое имеет тот же вид что и вторая. В итоге третье слагаемое в (19), так же является величиной порядка $0(\gamma_n)$.

Тем самым можно заключить, что для V_n справедлива оценка вида

$$V_n \le B(n,0)V_0 + 0(\gamma_n), \tag{20}$$

из которой и следует среднеквадратичная сходимость.

Что касается сходимости почти наверное, то она доказывается точно так же, как и в теореме 2 [9], с учетом того, что и в данном случае имеет место оценка вида

$$\|w(n,s)\| \le \prod_{k=s+1}^{n} (1-\beta\gamma_k).$$

Теорема доказана.

Примечание. Оценка (20) фактически и определяет скорость сходимости в среднеквадратическом.

Условие $\|A_n\| \le (1 - a\gamma_n \|\varphi_n\|^2)$ на первых шагах может и не выполняться, если не выбирать φ_n в соответствии с этим условием. Это случай, когда определяющими будут величины $\gamma_n \|\varphi_n\|^2$.

Однако на сходимость в целом это не будет влиять, так как всегда выполняется оценка $w(n,s) \le c \prod_{k=s}^{n} (1-\gamma_k\beta_k), c > 1$. Поэтому данное условие при практическом использовании алгоритма (1) проверять не обязательно и именно поэтому оно не было включено в формулировку теоремы. Точно так же и условие (4) не является существенным и следовательно при практической реализации алгоритма может не проверяться.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972.

2. *Цыпкин Я. З.* Основы теории обучающихся систем. М.: Наука, 1970.

3. *Айзерман М. А.* и др. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М.: Наука, 1970.

4. *Поляк Б. Г.* Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. Автоматика и телемеханика. I, № 12. С. 83–94, 1976; II, С. 101–107, 1977.

5. *Медведев Г. А.* Адаптивное оценивание при зависимых выборках // Вестн. БГУ. Сер 1. Мат. Мех. Физика. 1981. № 3.

6. *Деревицкий Д. П. Фрадков А. Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981.

7. *Красносельский М. А.* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

8. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.

9. *Карпиевич Н. А.* Сходимость адаптивных алгоритмов при коррелированных стохастических наблюдениях // Материалы науч. конф. «Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения». Мн., 2004. С. 35–41.