

# АППРОКСИМАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОЦЕССА ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ В ДВУХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ С ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ЛОКАЛЬНОГО СРЕДНЕГО

О. Г. Казанцева<sup>1</sup>, Г. А. Медведев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Витебский государственный университет  
Витебск, Беларусь

E-mail: KazantsevaOG@vsu.by

<sup>2</sup> Белорусский государственный университет  
Минск, Беларусь

E-mail: MedvedevGA@bsu.by

Для двумерного диффузионного процесса, используемого для моделирования динамики процентной ставки, предлагается способ аппроксимации плотности вероятностей. Анализ качества аппроксимации проводится на основе сравнения характеристик исходного распределения и предложенного: математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса.

*Ключевые слова:* двухфакторная модель, безрисковая процентная ставка, прямое уравнение Колмогорова.

## ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим двухфакторную модель безрисковой процентной ставки  $R(t)$ , которую представим в виде пары стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}dR(t) &= k_1(L(t) - R(t))dt + \sigma_1 \sqrt{L(t) - x} dW_1(t), \\dL(t) &= k_2(\Theta - L(t))dt + \sigma_2 \sqrt{L(t) - x} dW_2(t).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $R(t)$  – процесс безрисковой процентной ставки;  $L(t)$  – процесс ее локального (по времени) математического ожидания;  $\Theta$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – постоянные параметры модели;  $x$  – нижняя отражающая (недостижимая) граница процесса  $L(t)$ ;  $W_1(t)$  и  $W_2(t)$  – стандартные независимые между собой винеровские процессы. Заметим, что поскольку случайный процесс  $L(t)$  является процессом локального (по времени) математического ожидания, его изменения во времени более медленные, чем у процесса  $R(t)$ , поэтому для коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  можно предполагать выполнение неравенства  $k_1 > k_2$ .

Для упрощения аналитических выкладок удобнее уравнения (1) записать в несколько ином виде. Вместо процессов  $R(t)$  и  $L(t)$  введем их смещенные эквиваленты соотношениями:  $r(t) = R(t) - x$ ,  $l(t) = L(t) - x$ . Тогда уравнения (1) примут вид:

$$dr(t) = k_1(l(t) - r(t))dt + \sigma_1 \sqrt{l(t)} dW_1(t), \quad (2)$$

$$dl(t) = k_2(\theta - l(t))dt + \sigma_2\sqrt{l(t)} dW_2(t), \quad (3)$$

где  $\theta = \Theta - x$ . Будем считать, что условия недостижимости нижней границы [1] процессом  $l(t)$  выполняются:  $\sigma_2^2\theta/2k_2 < \theta^2$ . Тогда процесс  $l(t)$  является процессом с положительными значениями.

При условии, что в момент времени  $v$  процессы  $r(t)$  и  $l(t)$  принимали значения  $r(v)$  и  $l(v)$ , их можно представить в интегральной форме:

$$r(t) = r(v)e^{-k_1(t-v)} + \theta(1 - e^{-k_1(t-v)}) + \frac{k_1}{k_1 - k_2}(l(v) - \theta)[e^{-k_2(t-v)} - e^{-k_1(t-v)}] + \\ + \sigma_1 \int_v^t e^{-k_1(t-u)} \sqrt{l(u)} dw_1(u) + \frac{\sigma_2 k_1}{k_1 - k_2} \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}] \sqrt{l(u)} dw_2(u), \quad (4)$$

$$l(t) = l(v)e^{-k_2(t-v)} + \theta(1 - e^{-k_2(t-v)}) + \sigma_2 \int_v^t e^{-k_2(t-u)} \sqrt{l(u)} dw_2(u). \quad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) можно получить выражения для среднего значения и дисперсии процессов  $r(t)$  и  $l(t)$ .

$$E[r(t) | r(v), l(v)] = \theta + \frac{\theta}{k_1 - k_2} [k_2 e^{-k_1(t-v)} - k_1 e^{-k_2(t-v)}] + \\ + r(v)e^{-k_1(t-v)} + l(v) \frac{k_1}{k_1 - k_2} (e^{-k_2(t-v)} - e^{-k_1(t-v)}), \quad (6)$$

$$E[l(t) | l(v)] = \theta(1 - e^{-k_2(t-v)}) + l(v)e^{-k_2(t-v)}. \quad (7)$$

Из выражений (6) и (7) видно, что при  $r(v) > 0$  и  $l(v) > 0$  условные средние остаются положительными для всех  $t > 0$ .

Условные дисперсии  $D[r(t) | r(v), l(v)]$ ,  $D[l(t) | r(v), l(v)]$  и кросс-ковариация  $Cov[r(t), l(t) | r(v), l(v)]$  вычисляются по формулам:

$$Cov[r(t), l(t) | r(v), l(v)] = \frac{\sigma_2^2 k_1}{k_1 - k_2} \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}] e^{-k_2(t-u)} E[l(u) | r(v), l(v)] du. \quad (8)$$

$$D[r(t) | r(v), l(v)] = \sigma_1^2 \int_v^t e^{-2k_1(t-u)} E[l(u) | r(v), l(v)] du + \\ + \frac{\sigma_2^2 k_1^2}{(k_1 - k_2)^2} \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}]^2 E[l(u) | r(v), l(v)] du, \quad (9)$$

$$D[l(t) | r(v), l(v)] = \sigma_2^2 \int_v^t e^{-2k_2(t-u)} E[l(u) | r(v), l(v)] du. \quad (10)$$

Подставив (7) в формулы (8) – (10), мы получим явные формулы для дисперсий и кросс-ковариации:

$$D[r(t) | l(v)] = \sigma_1^2 \left( \theta \frac{1 - e^{-2k_1(t-v)}}{2k_1} + (l(v) - \theta) \frac{e^{-k_2(t-v)} - e^{-2k_1(t-v)}}{2k_1 - k_2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\sigma_2^2 k_1^2}{(k_1 - k_2)^2} \left( \theta \left( \frac{(k_1 - k_2)^2}{2k_1 k_2 (k_1 + k_2)} \frac{e^{-2k_1(t-v)}}{2k_1} \frac{e^{-2k_2(t-v)}}{2k_2} + \frac{2e^{-(k_1+k_2)(t-v)}}{k_1 + k_2} \right) + \right. \\
 & \left. + (l(v) - \theta) \left( \frac{2(k_1 - k_2)^2 e^{-k_2(t-v)}}{k_1 k_2 (2k_1 - k_2)} \frac{e^{-2k_1(t-v)}}{2k_1 - k_2} \frac{e^{-2k_2(t-v)}}{k_2} + \frac{2e^{-(k_1+k_2)(t-v)}}{k_1} \right) \right), \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$D[l(t) | l(v)] = \sigma_2^2 \left( \theta \frac{1 - e^{-2k_2(t-v)}}{2k_2} + (l(v) - \theta) \frac{e^{-k_2(t-v)} - e^{-2k_2(t-v)}}{k_2} \right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[r(t), l(t) | l(v)] &= \frac{\sigma_2^2 k_1}{(k_1 - k_2)^2} \left( \theta \left( \frac{k_1 - k_2}{2k_2 (k_1 + k_2)} \frac{e^{-2k_2(t-v)}}{2k_2} + \frac{e^{-(k_1+k_2)(t-v)}}{k_1 + k_2} \right) + \right. \\
 & \left. + (l(v) - \theta) \left( \frac{(k_1 - k_2)e^{-k_2(t-v)}}{k_1 k_2} \frac{e^{-2k_2(t-v)}}{k_2} + \frac{e^{-(k_1+k_2)(t-v)}}{k_1} \right) \right). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Безусловные дисперсии и кросс-ковариацию можно получить, переходя к пределу при  $v \rightarrow -\infty$ . В этом случае стационарные представления процессов  $r(t)$  и  $l(t)$  приобретают вид:

$$r(t) = \theta + \sigma_1 \int_{-\infty}^t e^{-k_1(t-u)} \sqrt{l(u)} dw_1(u) + \quad (6)$$

$$+ \frac{\sigma_2 k_1}{k_1 - k_2} \int_{-\infty}^t (e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}) \sqrt{l(u)} dw_2(u), \quad (7) \quad (14)$$

$$l(t) = \theta + \sigma_2 \int_{-\infty}^t e^{-k_2(t-u)} \sqrt{l(u)} dw_2(u). \quad (8) \quad (15)$$

Поэтому безусловные математические ожидания, дисперсии и ковариации процессов имеют вид:

$$E[r(t)] = E[l(t)] = \theta, \quad (16)$$

$$D_r \equiv D[r(t)] = \frac{\sigma_1^2 \theta}{2k_1} + \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{\sigma_2^2 \theta}{2k_2}, \quad D_l \equiv D[l(t)] = \frac{\sigma_2^2 \theta}{2k_2}, \quad (17)$$

$$\text{Cov}[r(t), r(t + \tau)] = \frac{\sigma_1^2 \theta}{2k_2} e^{-k_2|\tau|} + D_l \frac{k_2^2}{k_1(k_1 + k_2)} \frac{k_1 e^{-k_2|\tau|} - k_2 e^{-k_1|\tau|}}{k_1 - k_2}, \quad (9) \quad (18)$$

$$\text{Cov}[l(t), l(t + \tau)] = \frac{\sigma_2^2 \theta}{2k_2} e^{-k_2|\tau|} = D_l e^{-k_2|\tau|}, \quad (10) \quad (19)$$

$$\text{Cov}[r(t), l(t + \tau)] = D_l \frac{k_1}{k_1 + k_2} e^{-k_2\tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (20)$$

$$\text{Cov}[r(t + \tau), l(t)] = D_l \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{(k_1 + k_2)e^{-k_2\tau} - 2k_2 e^{-k_1\tau}}{k_1 - k_2}, \quad \tau \geq 0. \quad (21)$$

Из формул (15) следует, что для того, чтобы имело место неравенство  $D_r > D_l$ , необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство  $(\sigma_2^2/\sigma_1^2) < [1 + (k_2/k_1)]$ . Поэтому  $D_r > D_l$  для всяких  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ .

При описании модели предпочтительнее пользоваться такими параметрами, которые имеют реальный эконометрический смысл. Реально предполагать, что процентная ставка  $R(t)$  может наблюдаться или в крайнем случае оцениваться по другим наблюдениям. Процесс  $L(t)$  ненаблюдаемый, но в качестве его оценки можно брать тренд процесса  $R(t)$ . После получения траектории процессов  $R(t)$  и  $L(t)$  достаточной продолжительности можно построить состоятельные оценки их стационарных математических ожиданий и дисперсий. Поэтому желательно, чтобы описание модели (1) содержало эти параметры. Это можно сделать, используя полученные выше соотношения (17), выразив через стационарные дисперсии волатильности уравнений (1).

$$\sigma_1 \sqrt{L(t) - x} = \sqrt{2k_1 \left( D_r - D_l \frac{k_1}{k_1 + k_2} \right) \frac{L(t) - x}{\Theta - x}}, \quad \sigma_2 \sqrt{L(t) - x} = \sqrt{2k_2 D_l \frac{L(t) - x}{\Theta - x}}. \quad (22)$$

### АППРОКСИМАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Прямое уравнение Колмогорова для плотности вероятностей  $p(t, r, l | v, r_v, l_v)$  модели (2) – (3) будет иметь вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k_1 \frac{\partial}{\partial r} [(r - l)p] + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [lp] + k_2 \frac{\partial}{\partial l} [(l - \theta)p] + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} [lp] \quad (23)$$

с начальным условием:  $\lim_{t \downarrow v} p(t, r, l | v, r_v, l_v) = \delta(r - r_v)\delta(l - l_v)$ .

К сожалению, уравнения Колмогорова в аналитическом виде решаются крайне редко. Приведем случаи, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Для одномерного диффузионного процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = \mu(t, x)dt + \sigma(t, x)dW(t), \quad t > v, \quad x(v) = x_v, \quad (24)$$

условная плотность вероятностей  $p(t, x | v, x_v)$  удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(t, x)p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(t, x)p] \quad (25)$$

с начальным условием  $\lim_{t \downarrow v} p(t, x | v, x_v) = \delta(x - x_v)$ .

1. *Нормальное распределение.* Пусть функции дрейфа и волатильности в одномерном уравнении (24) соответственно имеют вид:

$$\mu(t, x) = k(\mu - x), \quad \sigma(t, x) = \sigma, \quad (26)$$

где  $k$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  – константы. Тогда уравнение (25) принимает форму:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \left( \frac{\partial}{\partial x} [(x - \mu)p] + \frac{\sigma^2}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [p] \right), \quad (27)$$

и его решением является плотность нормального распределения

$$p(t, x | v, x_v) = \frac{\sqrt{k}}{\sigma \sqrt{\pi(1 - e^{-2k(t-v)})}} \exp\left(-k \frac{[x - \mu - (x_0 - \mu)e^{-k(t-v)}]^2}{\sigma^2(1 - e^{-2k(t-v)})}\right) \quad (28)$$

2. Нецентральное  $\chi^2$  распределение. Пусть функции дрейфа и волатильности в одномерном уравнении (24) соответственно имеют вид:

$$\mu(t, x) = k(\mu - x), \quad \sigma(t, x) = \sigma \sqrt{x}, \quad (29)$$

где  $k$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  – константы. Тогда уравнение (25) принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \left( \frac{\partial}{\partial x} [(x - \mu)p] + \frac{\sigma^2}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [xp] \right), \quad (30)$$

а его решением является плотность нецентрального  $\chi^2$  распределения

$$p(t, x | v, x_v) = c e^{-u-s} (s/u)^{q/2} I_q(2\sqrt{us}), \quad (31)$$

где  $u = cx_v e^{-k(t-v)}$ ,  $s = cx$ ,  $c = 2k(1 - e^{-k(t-v)})^{-1}/\sigma^2$ ,  $q = 2k\mu/\sigma^2 - 1$ . Здесь  $I_q(x)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $q$ , которая является решением уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{q^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (32)$$

и имеет свойства  $I_q(x) = L_{-q}(x)$ ,  $d[x^q I_q(x)]/dx = x^q I_{q-1}(x)$ .

Заметим, что плотность вероятностей (31) может быть представлена в другой форме: как смесь гамма-распределений с коэффициентами смешивания в виде пуассоновских вероятностей [2]:

$$p(t, x | v, x_v) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j e^{-u}}{j!} \frac{cs^{q+j} e^{-s}}{\Gamma(q+j+1)}, \quad (33)$$

что может облегчить анализ, так как не требует использования функций Бесселя. В этом представлении обозначения те же, что и в формуле (31).

Вернемся к уравнению (23). Заметим, что уравнение (3) описывает одномерный диффузионный процесс, в котором функции дрейфа и волатильности имеют вид (29). Поэтому плотностью процесса  $l(t)$  будет плотность нецентрального  $\chi^2$  распределения:

$$p_l(t, l | v, l_v) = c e^{-u-s} (s/u)^{q/2} I_q(2\sqrt{us}), \quad (34)$$

где  $u = cl_v e^{-k_2(t-v)}$ ,  $s = cl$ ,  $c = 2k_2(1 - e^{-k_2(t-v)})^{-1}/\sigma_2^2$ ,  $q = 2k_2\theta/\sigma_2^2 - 1$ .

Чтобы получить идею о плотности процесса  $r(t)$ , будем рассматривать  $l$  как параметр. Тогда в уравнении (2) функции дрейфа и волатильности имеют вид (26) и плотностью процесса  $r(t)$  будет плотность нормального распределения:

$$p_2(t, r, l | v, r_v) = \frac{\sqrt{k_1}}{\sigma_1 \sqrt{l} \sqrt{\pi(1 - e^{-2k_1(t-v)})}} \exp\left(-k \frac{[r - l - (r_v - l)e^{-k_1(t-v)}]^2}{\sigma_1^2 l (1 - e^{-2k_1(t-v)})}\right). \quad (35)$$

В качестве совместной плотности вероятностей процессов (2) – (3) будем рассматривать произведение функций (34) и (35). В этом случае процесс  $l(t)$  будет характеризоваться гамма-распределением, и все характеристики распределения будут

совпадать с истинными значениями, но процесс  $r(t)$  не будет распределен нормально, так как интегрирование произведения функций (34) и (35) по  $l$  не приводит к нормальной плотности. То есть нормальной будет только условная плотность вероятностей процесса  $r(t)$  (при фиксированном  $l$ ), но безусловная – нормальной не будет.

Оценим качество предложенной аппроксимации, сравнив характеристики исходного распределения (6), (9), (8), (39), (42) и предложенного – (36), (37), (38), (40), (43) соответственно.

$$E_{анп} = E_{анпрокс} [r(t) | r(v), l(v)] = \iint r p_2(r, l) dr p_1(l) dl = \\ = r(v)e^{-k_1(t-v)} + \theta(1 - e^{-k_1(t-v)}) + (l(v) - \theta)(1 - e^{-k_1(t-v)})e^{-k_2(t-v)}. \quad (36)$$

$$D_{анп} = D_{анпрокс} [r(t) | r(v), l(v)] = \iint (r - E_{анп})^2 p_2(r, l) dr p_1(l) dl = \\ = \frac{\sigma_2^2}{2k_1} (1 - e^{-k_1(t-v)})^2 (1 - e^{-k_2(t-v)}) [2l(v)e^{-k_2(t-v)} + \theta(1 - e^{-k_2(t-v)})] + \\ + \frac{\sigma_1^2}{2k_1} (1 - e^{-2k_1(t-v)}) [\theta + (l(v) - \theta)e^{-k_2(t-v)}]. \quad (37)$$

$$Cov_{анп} = Cov_{анпрокс} [r(t), l(t) | r(v), l(v)] = \iint (r - E_{анп})(l - E[l(t) | l(v)]) p_2(r, l) dr p_1(l) dl = \\ = D[l(t) | l(v)] (1 - e^{-k_1(t-v)}). \quad (38)$$

Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии распределения. В нашем случае для процесса  $r(t)$  эта величина равна нулю как для истинного, так и для предложенного распределения:

$$\mu_3[r(t) | r(v), l(v)] = E [(r(t) - E[r(t) | r(v), l(v)])^3 | r(v), l(v)] = 0. \quad (39)$$

$$\mu_{анп}[r(t) | r(v), l(v)] = \iint (r - E_{анп})^3 p_2(r, l) dr p_1(l) dl = 0. \quad (40)$$

Четвертый центральный момент служит для характеристики так называемой «крутости», т. е. островершинности или плосковершинности распределения. Определим его для истинного распределения:

$$\mu_4[r(t) | r(v), l(v)] = E [(r(t) - E[r(t) | r(v), l(v)])^4 | r(v), l(v)]. \quad (41)$$

Поскольку

$$(r(t) - E[r(t) | r(v), l(v)])^2 = \left( \sigma_1 \int_v^t e^{-k_1(t-u)} \sqrt{l(u)} dw_1(u) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_2 k_1}{k_1 - k_2} \int_v^t [e^{-k_1(t-u)} - e^{-k_2(t-u)}] \sqrt{l(u)} dw_2(u) \right)^2 = \\ = \sigma_1^2 \int_v^t e^{-2k_1(t-u)} l(u) du + \frac{\sigma_2^2 k_1^2}{(k_1 - k_2)^2} \int_v^t [e^{-k_1(t-u)} - e^{-k_2(t-u)}]^2 l(u) du,$$

$$\text{то } (r(t) - E[r(t) | r(v), l(v)])^4 = \sigma_1^4 \int_v^t e^{-2k_1(t-u)} l(u) du \cdot \int_v^t e^{-2k_1(t-y)} l(y) dy +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 k_1^2}{(k_1 - k_2)^2} \int_v^t e^{-2k_1(t-y)} l(y) dy \cdot \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}]^2 l(u) du + \\
& + \frac{\sigma_2^4 k_1^4}{(k_1 - k_2)^4} \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}]^2 l(u) du \cdot \int_v^t [e^{-k_2(t-y)} - e^{-k_1(t-y)}]^2 l(y) dy.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mu_4[r(t) | r(v), l(v)] &= \sigma_1^4 \int_v^t \int_v^t e^{-2k_1(t-u)} e^{-2k_1(t-y)} E[l(u)l(y)] dy du + \\
& + 2 \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 k_1^2}{(k_1 - k_2)^2} \int_v^t \int_v^t e^{-2k_1(t-y)} [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}]^2 E[l(u)l(y)] dy du + \quad (42) \\
& + \frac{\sigma_2^4 k_1^4}{(k_1 - k_2)^4} \int_v^t \int_v^t [e^{-k_2(t-u)} - e^{-k_1(t-u)}]^2 [e^{-k_2(t-y)} - e^{-k_1(t-y)}]^2 E[l(u)l(y)] dy du,
\end{aligned}$$

где  $E[l(u)l(y) | r(v), l(v)] = E[(\theta + (l(v) - \theta)e^{-k_2(u-v)} + \sigma_2 \int_v^u e^{-k_2(u-z)} \sqrt{l(z)} dw_2(z)) \times$

$$\begin{aligned}
& \times (\theta + (l(v) - \theta)e^{-k_2(y-v)} + \sigma_2 \int_v^y e^{-k_2(y-z)} \sqrt{l(z)} dw_2(z))] = \\
& = \theta^2 + (l(v) - \theta)\theta(e^{-k_2(y-v)} + e^{-k_2(u-v)}) + (l(v) - \theta)^2 e^{-k_2((u+y)-2v)} + \\
& \quad + \sigma_2^2 \theta e^{-k_2(u+y)} \int_v^{\min(u,y)} e^{2k_2 z} dz = \\
& = \theta^2 + (l(v) - \theta)\theta(e^{-k_2(y-v)} + e^{-k_2(u-v)}) + (l(v) - \theta)^2 e^{-k_2((u+y)-2v)} + \\
& \quad + \frac{\sigma_2^2 \theta}{2k_2} e^{-k_2(u+y)} (e^{2k_2 m} - e^{2k_2 v}), \quad \text{где } m = \min(u, y).
\end{aligned}$$

В силу громоздкости явное представление формулы (42) мы не приводим. Далее определим четвертый центральный момент для нашей аппроксимации:

$$\begin{aligned}
\mu_{4anp}[r(t) | r(v), l(v)] &= \iint (r - E_{anp})^4 p_2(r, l) dr p_1(l) dl = \\
& = \frac{3\sigma_1^4}{4k_1^2} (1 - e^{-2k_1 t})^2 (E^2[l(t) | l(v)] + D[l(t) | l(v)]). \quad (43)
\end{aligned}$$

Для анализа более удобно использовать безразмерные величины – коэффициент корреляции и эксцесс:  $\rho = Cov[r(t), l(t)] / \sqrt{D[r(t)]D[l(t)]}$ ,  $Ex = \mu_4 / (D[r(t)])^2 - 3$ .

**Пример:**  $k_1 = 4,4306$ ;  $k_2 = 0,1645$ ;  $\sigma_1 = 0,5077$ ;  $\sigma_2 = 0,0720$ ;  $\theta = 2,2539$ ;  $l(v) = 2$ .

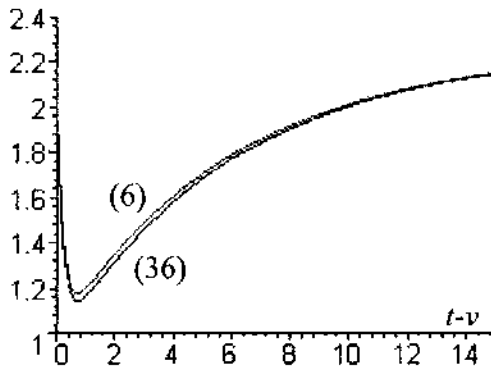


Рис. 1. Графики функций (6) и (36)

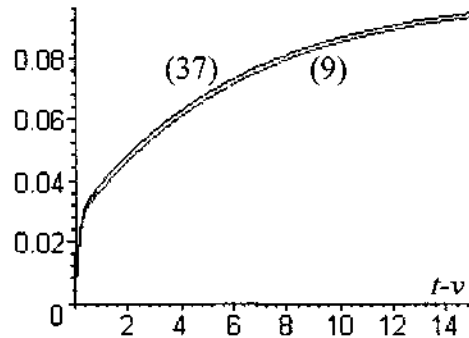


Рис. 2. Графики функций (9) и (37)

Как видно из рисунков, выбранная аппроксимация обеспечивает близкие значения первых двух моментов с их истинными значениями.

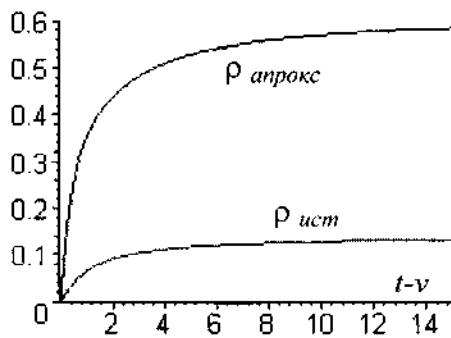


Рис. 3. Коэффициент корреляции

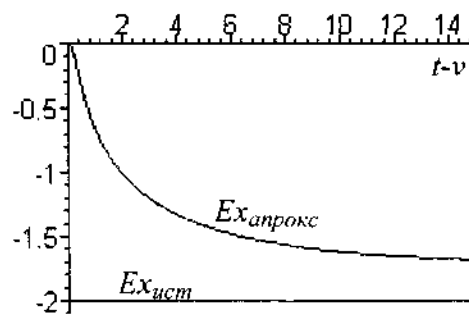


Рис. 4. Эксцесс

Из рис. 3 видно, что  $\rho_{\text{апрокс}}(t-v) > \rho_{\text{ист}}(t-v)$  для любых  $(t-v)$ . Это свидетельствует о том, что предложенная аппроксимация предполагает несколько большую линейную зависимость процессов  $r(t)$  и  $l(t)$  по сравнению с истинным распределением.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Feller W. Two singular diffusion problems // Annals of Mathematics. 1951, V. 54, N. 1. P. 173-182.