# ИССЛЕДОВАНИЕ ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

**Т. И. Илюкевич**

*Белорусский государственный университет*
*Минск, Беларусь*
*E-mail: iliukevich@bsu.by*

Во многих практических задачах часто приходится иметь дело со стационарными случайными процессами с нерегулярными наблюдениями. Нерегулярности могут носить как систематический, так и случайный характер. В данной работе будем рассматривать стационарные случайные процессы со случайными нерегулярностями. Вопросы исследования таких случайных процессов можно найти в работах Э. Парзена, П. Шейнока, Р. Маршалла, Д. Бриллинджера и других авторов.

*Ключевые слова*: стационарный случайный процесс, математическое ожидание, ковариационная функция, спектральная плотность.

Пусть $X(t)$, $d(t)$, $t \in Z$ стационарные в широком смысле случайные процессы с математическими ожиданиями $m^X, m^d$, ковариационными функциями $R^X(\tau), R^d(\tau)$, $\tau \in Z$ и спектральными плотностями $f^X(\lambda), f^d(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$ соответственно.

Рассмотрим случайный процесс

$$Y(t) = X(t)d(t), \tag{1}$$

где процессы $X(t)$ и $d(t)$ независимы, $t \in Z$.

Пусть в результате некоторого эксперимента получено $T$ последовательных через равные промежутки времени наблюдений

$$Y(0), Y(1), \ldots, Y(T-1) \tag{2}$$

за процессом $Y(t)$, $t \in Z$, который связан с процессами $X(t)$, $d(t)$, $t \in Z$ соотношением (1). Возникает задача: по наблюдениям (2) построить оценку ковариационной функции процесса $X(t)$, $t \in Z$, при условии, что характеристики процесса $d(t)$, $t \in Z$ известны.

Не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать, что математические ожидания процессов $X(t)$ и $d(t)$ равно нулю.

В качестве оценки ковариационной функции, построенной по наблюдениям (2), рассмотрим статистику вида

$$\hat{R}^X(\tau) = \frac{1}{(T-\tau)R^d(\tau)} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} Y(t)Y(t+\tau), \tau = \overline{0, T-1}, \qquad (3)$$

$$\hat{R}^X(-\tau) = \hat{R}^X(\tau), \hat{R}^X(\tau) = 0, |\tau| \geq T.$$

**Теорема.** Если спектральные плотности $f^X(\lambda)$ и $f^d(\lambda)$ процессов непрерывны на П, семиинвариантные спектральные плотности $f_4^X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $f_4^d(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ непрерывны на $\Pi^3$, а $\iiint_{\Pi^3} \left| f_4^X(x_1, x_2, x_3) \right| dx_1 dx_2 dx_3 < \infty$, $\iiint_{\Pi^3} \left| f_4^d(y_1, y_2, y_3) \right| dy_1 dy_2 dy_3 < \infty$, то статистика (3) является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой ковариационной функции $R^X(\tau), \tau \in Z$ процесса $X(t)$, $t \in Z$.

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что

$$M\hat{R}^X(\tau) = \frac{1}{(T-\tau)R^d(\tau)} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} MY(t)Y(t+\tau) =$$

$$= \frac{1}{(T-\tau)R^d(\tau)} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} MX(t)X(t+\tau)Md(t)d(t+\tau) = R^X(\tau),$$

то есть статистика (3) является несмещенной оценкой ковариационной функции.

Из определения ковариации имеем

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{R}^X(\tau_1), \hat{R}^X(\tau_2)\right\} = \frac{1}{(T-\tau_1)(T-\tau_2)R^d(\tau_1)R^d(\tau_2)} \times$$

$$\times \sum_{t_1=0}^{T-\tau_1-1} \sum_{t_2=0}^{T-\tau_2-1} \left[ MX(t_1+\tau_1)X(t_1)X(t_2+\tau_2)X(t_2)Md(t_1+\tau_1)d(t_1)d(t_2+\tau_2)d(t_2) - \right.$$

$$\left. - MX(t_1+\tau_1)X(t_1)MX(t_2+\tau_2)X(t_2)Md(t_1+\tau_1)d(t_1)Md(t_2+\tau_2)d(t_2) \right] =$$

$$= \frac{1}{(T-\tau_1)(T-\tau_2)R^d(\tau_1)R^d(\tau_2)} \times$$

$$\times \sum_{t_1=0}^{T-\tau_1-1} \sum_{t_2=0}^{T-\tau_2-1} m_4^X(t_1+\tau_1, t_1, t_2+\tau_2, t_2) m_4^d(t_1+\tau_1, t_1, t_2+\tau_2, t_2) -$$

$$- R^X(\tau_1)R^X(\tau_2).$$

Используя связь между смешанными моментами четвертого порядка и смешанными семиинвариантами четвертого порядка [2], получим

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{R}^X(\tau_1), \hat{R}^X(\tau_2)\right\} = \frac{1}{(T-\tau_1)(T-\tau_2)R^d(\tau_1)R^d(\tau_2)} \times$$

$$\times \sum_{t_1=0}^{T-\tau_1-1}\sum_{t_2=0}^{T-\tau_2-1}\Big[c_4^X(t_1+\tau_1,t_1,t_2+\tau_2,t_2)+R^X(t_1+\tau_1,t_1)R^X(t_2+\tau_2,t_2)+$$

$$R^X(t_1,t_2)R^X(t_1+\tau_1,t_2+\tau_2)+R^X(t_1,t_2+\tau_2)R^X(t_1+\tau_1,t_2)\Big]$$

$$\times\Big[c_4^d(t_1+\tau_1,t_1,t_2+\tau_2,t_2)+R^d(t_1+\tau_1,t_1)R^d(t_2+\tau_2,t_2)+$$

$$+R^d(t_1,t_2)R^d(t_1+\tau_1,t_2+\tau_2)+R^d(t_1,t_2+\tau_2)R^d(t_1+\tau_1,t_2)\Big]-R^X(\tau_1)R^X(\tau_2).$$

Учитывая стационарность процессов X(t), d(t), $t\in Z$, используя элементарное равенство

$$\sum_{t=0}^{T-1}e^{itx}=\Delta_T(x)e^{\frac{i(T-1)x}{2}}$$

и подставляя вместо ковариационной функции и смешанного семиинварианта четвертого порядка их выражения через спектральную плотность и семиинвариантную спектральную плотность четвертого порядка соответственно, имеем

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{R}^X(\tau_1),\hat{R}^X(\tau_2)\right\}=\frac{1}{(T-\tau_1)(T-\tau_2)R^d(\tau_1)R^d(\tau_2)}\times$$

$$\times\Bigg[\iiint\!\!\iiint_{\Pi^6} f_4^X(x_1,x_2,x_3)f_4^d(y_1,y_2,y_3)\Delta_{T-\tau_1}(x_1+x_2+y_1+y_2)\times$$

$$\times\Delta_{T-\tau_2}(x_1+x_2+y_1+y_2)e^{i\tau_1(x_1+y_1)+i\tau_2(x_3+y_3)}dx_1dx_2dx_3dy_1dy_2dy_3+$$

$$+\iint_{\Pi^5}\iiint f^X(x_1)f^X(x_2)f_4^d(y_1,y_2,y_3)\Delta_{T-\tau_1}(x_1+x_2+y_1+y_2)\Delta_{T-\tau_2}(x_1+x_2+y_1+y_2)\times$$

$$\times\left(e^{i\tau_1(x_1+y_1)+i\tau_2(y_3-x_1)}+e^{i\tau_1(x_1+y_1)+i\tau_2(y_3-x_2)}\right)dx_1dx_2dy_1dy_2dy_3+$$

$$+\iiint\!\!\iint_{\Pi^5} f^X(x_1)f^X(x_2)f_4^d(y_1,y_2,y_3)\Delta_{T-\tau_1}(y_1+y_2)\Delta_{T-\tau_2}(y_1+y_2)\times$$

$$\times e^{i\tau_1(x_1+y_1)+i\tau_2(y_3+x_2)}dx_1dx_2dy_1dy_2dy_3+$$

$$+\iiint\!\!\iint_{\Pi^5} f^d(y_1)f^d(y_2)f_4^X(x_1,x_2,x_3)\Delta_{T-\tau_1}(x_1+x_2+y_1+y_2)\Delta_{T-\tau_2}(x_1+x_2+y_1+y_2)\times$$

$$\times e^{iy_1(\tau_1-\tau_2)+ix_1\tau_1+i\tau_2x_3}dx_1dx_2dx_3dy_1dy_2+$$

$$+\iiiint_{\Pi^4} f^d(y_1)f^d(y_2)f^X(x_1)f^X(x_2)\Delta_{T-\tau_1}(x_1+x_2+y_1+y_2)\Delta_{T-\tau_2}(x_1+x_2+y_1+y_2)\times$$

$$\times\left(e^{iy_1(\tau_1-\tau_2)+ix_1(\tau_1-\tau_2)}+e^{iy_1(\tau_1-\tau_2)+ix_1\tau_1-ix_2\tau_2}\right)dx_1dx_2dy_1dy_2+$$

$$+\iint_{\Pi^4}\iint f^d(y_1)f^d(y_2)f^X(x_1)f^X(x_2)\Delta_{T-\tau_1}(y_1+y_2)\Delta_{T-\tau_2}(y_1+y_2)\times$$

$$\times e^{iy_1(\tau_1-\tau_2)+ix_1\tau_1+ix_2\tau_2}dx_1dx_2dy_1dy_2+$$

$$+\iiint\!\!\iint_{\Pi^5} f^d(y_1)f^d(y_2)f_4^X(x_1,x_2,x_3)\Delta_{T-\tau_1}(x_1+x_2+y_1+y_2)\Delta_{T-\tau_2}(x_1+x_2+y_1+y_2)\times$$

$$\times e^{iy_1\tau_1-iy_2\tau_2+ix_1\tau_1+i\tau_2x_3}dx_1dx_2dx_3dy_1dy_2+$$

$$+\iint_{\Pi^4}\iint f^d(y_1)f^d(y_2)f^X(x_1)f^X(x_2)\Delta_{T-\tau_1}(x_1+x_2+y_1+y_2)\Delta_{T-\tau_2}(x_1+x_2+y_1+y_2)\times$$

$$\times\left(e^{iy_1\tau_1-y_2\tau_2+ix_1(\tau_1+\tau_2)}+e^{iy_1\tau_1-y_2\tau_2+ix_1\tau_1-ix_2\tau_2}\right)dx_1dx_2dy_1dy_2+$$

$$+\iint_{\Pi^4}\iint f^d(y_1)f^d(y_2)f^X(x_1)f^X(x_2)\Delta_{T-\tau_1}(y_1+y_2)\Delta_{T-\tau_2}(y_1+y_2)\times$$

$$\times e^{iy_1\tau_1-iy_2\tau_2+ix_1\tau_1+ix_2\tau_2}dx_1dx_2dy_1dy_2+$$

$$+\iiint_{\Pi^5}\iint f^d(y_1)f^d(y_2)f_4^X(x_1,x_2,x_3)\Delta_{T-\tau_1}(x_1+x_2)\Delta_{T-\tau_2}(x_1+x_2)\times$$

$$\times e^{iy_1\tau_1+iy_2\tau_2+ix_1\tau_1+i\tau_2x_3}dx_1dx_2dx_3dy_1dy_2+$$

$$+\iint_{\Pi^4}\iint f^d(y_1)f^d(y_2)f^X(x_1)f^X(x_2)\Delta_{T-\tau_1}(x_1+x_2)\Delta_{T-\tau_2}(x_1+x_2)\times$$

$$\times\left(e^{iy_1\tau_1+y_2\tau_2+ix_1(\tau_1+\tau_2)}+e^{iy_1\tau_1+y_2\tau_2+ix_1\tau_1-ix_2\tau_2}\right)dx_1dx_2dy_1dy_2+$$

$$+(T-\tau_1)(T-\tau_2)\iint_{\Pi^4}\iint f^d(y_1)f^d(y_2)f^X(x_1)f^X(x_2)\times$$

$$\times e^{iy_1\tau_1+y_2\tau_2+ix_1\tau_1+ix_2\tau_2}dx_1dx_2dy_1dy_2\Big]-R^X(\tau_1)R^X(\tau_2).$$

В полученном выражении сделаем замены переменных интегрирования

$$\begin{cases}x_1+x_2=z_1\\ x_1=x_1\\ x_3=x_3\end{cases},\quad\begin{cases}y_1+y_2=z_2\\ y_1=y_1\\ y_3=y_3\end{cases},$$

а затем

$$\begin{cases}z=z_1+z_2\\ z_1=z_1\end{cases},$$

получим

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{R}^X(\tau_1),\hat{R}^X(\tau_2)\right\}=\frac{1}{(T-\tau_1)(T-\tau_2)R^d(\tau_1)R^d(\tau_2)}\times$$

$$\int_{\Pi}\Delta_{T-\tau_1}(z)\Delta_{T-\tau_2}(z)\big(F_1(z)+F_2(z)+F_3(z)+F_4(z)+F_5(z)+F_6(z)+F_7(z)\big)dz,$$

где

$$F_1(z)=\iiint_{\Pi^5}\iint f_4^X(x_1,z_1-x_1,x_3)f_4^d(y_1,z-z_1-y_1,y_3)e^{i\tau_1(x_1+y_1)+i\tau_2(x_3+y_3)}dx_1dz_1dx_3dy_1dy_3,$$

$$F_2(z)=\iint_{\Pi^4}\iint f^X(x_1)f^X(z_1-x_1)f_4^d(y_1,z-z_1-y_1,y_3)\times$$

$$\times\left(e^{i\tau_1(x_1+y_1)+i\tau_2(y_3-x_1)}+e^{i\tau_1(x_1+y_1)+i\tau_2(y_3-z_1+x_1)}\right)dx_1dz_1dy_1dy_3,$$

$$F_3(z)=\iint_{\Pi^4}\iint f^X(x_1)f^X(x_2)f_4^d(y_1,z-y_1,y_3)e^{i\tau_1(x_1+y_1)+i\tau_2(y_3+x_2)}dx_1dx_2dy_1dy_3,$$

$$F_4(z)=\iiiint\limits_{\Pi^4} f^d(y_1)f^d(z-z_1-y_1)f_4^X(x_1,z_1-x_1,x_3)\times$$

$$\times\left(e^{iy_1(\tau_1-\tau_2)+ix_1\tau_1+i\tau_2x_3}+e^{iy_1\tau_1-i(z-z_1-y_1)\tau_2+ix_1\tau_1+i\tau_2x_3}\right)dx_1dz_1dx_3dy_1,$$

$$F_5(z)=\iiint\limits_{\Pi^3} f^d(y_1)f^d(z-z_1-y_1)f^X(x_1)f^X(z_1-x_1)\times$$

$$\times\left(e^{iy_1(\tau_1-\tau_2)+ix_1(\tau_1-\tau_2)}+e^{iy_1(\tau_1-\tau_2)+ix_1\tau_1-i(z_1-x_1)\tau_2}+\right.$$

$$\left.+e^{iy_1\tau_1-i(z-y_1-z_1)\tau_2+ix_1(\tau_1+\tau_2)}+e^{iy_1\tau_1-i(z-z_1-y_1)\tau_2+ix_1\tau_1-i(z_1-x_1)\tau_2}\right)dx_1dz_1dy_1,$$

$$F_6(z)=\iiint\limits_{\Pi^3} f^d(y_1)f^d(z-y_1)f^X(x_1)f^X(x_2)\times$$

$$\times\left(e^{iy_1(\tau_1-\tau_2)+ix_1\tau_1+ix_2\tau_2}+e^{iy_1\tau_1-i(z-y_1)\tau_2+ix_1\tau_1+ix_2\tau_2}\right)dx_1dx_2dy_1,$$

$$F_7(z)=\iiiint\limits_{\Pi^4} f^d(y_1)f^d(y_2)f_4^X(x_1,z-x_1,x_3)e^{iy_1\tau_1+iy_2\tau_2+ix_1\tau_1+i\tau_2x_3}dx_1dx_3dy_1dy_2.$$

Используя соотношение

$$\Delta_{T-\tau_1}(z)\Delta_{T-\tau_2}(z)=\Delta^2_{T-\tau_1}(z)\cos\frac{(\tau_1-\tau_2)z}{2}+\Delta_{T-\tau_1}(z)\Delta_{\tau_1-\tau_2}(z)\cos\frac{(T-\tau_1)z}{2},$$

имеем

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{R}^X(\tau_1),\hat{R}^X(\tau_2)\right\}=\frac{1}{(T-\tau_1)(T-\tau_2)R^d(\tau_1)R^d(\tau_2)}\times$$

$$\times\left[2\pi(T-\tau_1)\int\limits_{\Pi}\left(\Phi_{T-\tau_1}(z)\cos\frac{(\tau_1-\tau_2)z}{2}+\Delta_{T-\tau_1}(z)\Delta_{\tau_1-\tau_2}(z)\cos\frac{(T-\tau_1)z}{2}\right)\times\right.$$

$$\times\left(F_1(z)+F_2(z)+F_3(z)+F_4(z)+F_5(z)+F_6(z)+F_7(z)\right)dz,$$

где $\Phi_{T-\tau_1}(z)$ – ядро Фейера.

Исследуем асимптотическое поведение $\operatorname{cov}\left\{\hat{R}^X(\tau_1),\hat{R}^X(\tau_2)\right\}$ при $T\to\infty$.

Так как $\left|\Delta_T(x)\right|\le T$, получим

$$\left|\int\limits_{\Pi}\Delta_{T-\tau_1}(z)\Delta_{\tau_1-\tau_2}(z)\cos\frac{(T-\tau_1)z}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(F_1(z)+F_2(z)+F_3(z)+F_4(z)+F_5(z)+F_6(z)+F_7(z)\right)\right|\le$$

$$\le(T-\tau_1)\left|\tau_1-\tau_2\right|\left(\iiint\limits_{\Pi^3}\left|f_4^X(x_1,x_2,x_3)\right|dx_1dx_2dx_3\iiint\limits_{\Pi^3}\left|{}_4^d(y_1,y_2,y_3)\right|dy_1dy_2dy_3+\right.$$

$$+2\left(\int\limits_{\Pi}f^X(x)dx\right)^2\iiint\limits_{\Pi^3}\left|f_4^d(y_1,y_2,y_3)\right|dy_1dy_2dy_3+$$

$$+2\left(\int\limits_{\Pi} f^{d}(y)dy\right)^{2}\iiint\limits_{\Pi^{3}}\left|f_{4}^{X}(x_{1},x_{2},x_{3})\right|dx_{1}dx_{2}dx_{3}+$$

$$+2\left(\int\limits_{\Pi} f^{d}(y)dy\right)^{2}\left(\int\limits_{\Pi} f^{X}(x)dx\right)^{2}\Bigg).$$

Таким образом, исходя из условий теоремы,

$$\frac{|\tau_1-\tau_2|}{(T-\tau_2)R^{d}(\tau_1)R^{d}(\tau_2)}\left(\iiint\limits_{\Pi^{3}}\left|f_{4}^{X}(x_{1},x_{2},x_{3})\right|dx_{1}dx_{2}dx_{3}\iiint\limits_{\Pi^{3}}\left|f_{4}^{d}(y_{1},y_{2},y_{3})\right|dy_{1}dy_{2}dy_{3}+\right.$$

$$+2\left(\int\limits_{\Pi} f^{X}(x)dx\right)^{2}\iiint\limits_{\Pi^{3}}\left|f_{4}^{d}(y_{1},y_{2},y_{3})\right|dy_{1}dy_{2}dy_{3}+$$

$$+2\left(\int\limits_{\Pi} f^{d}(y)dy\right)^{2}\iiint\limits_{\Pi^{3}}\left|f_{4}^{X}(x_{1},x_{2},x_{3})\right|dx_{1}dx_{2}dx_{3}+$$

$$\left.+2\left(\int\limits_{\Pi} f^{d}(y)dy\right)^{2}\left(\int\limits_{\Pi} f^{X}(x)dx\right)^{2}\right)\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Из непрерывности спектральных плотностей и семиинвариантных спектральных плотностей четвертого порядка процессов $X(t)$ и $d(t)$, $t\in Z$ вытекает, что функции $F_j(z), j=\overline{1,7}$ равномерно непрерывны по z. Следовательно, учитывая свойства ядра Фейера, получим, что

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_{\Pi}\Phi_{T-\tau_1}(z)\cos\frac{(\tau_1-\tau_2)z}{2}\times$$

$$\times\left(F_1(z)+F_2(z)+F_3(z)+F_4(z)+F_5(z)+F_6(z)+F_7(z)\right)dz=\sum_{j=1}^{7}F_j(0).$$

Исходя из условий теоремы, получаем

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{R}^{X}(\tau_1),\hat{R}^{X}(\tau_2)\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$$

что и требовалось доказать.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Труш Н. Н., Илюкевич Т. И.* Оценка математического ожидания стационарных случайных процессов с нерегулярными наблюдениями // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физ. Мат. Мех. 2003. С. 49–52.

2. *Труш Н. Н.* Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн.: БГУ, 1999.

3. *Jones R. H.* Spectral analysis with regularly missed observation // Ann. Math. Statist. 1962. V. 33. N. 2.

4. Time series analysis of irregularly observed data: proceedings of a symposium held at Texas A&M Uni / edited by Emanuel Parzen, 1983.