ОБ АППРОКСИМАЦИИ СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОГО РЫНКА

Н. М. Зуев, Я. Б. Кошкин, П. М. Лаппо

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: LappoPM@bsu.by

Предложен способ оценивания стоимости опциона Европейского типа на неполных рынках, используя аппроксимацию стоимости акций случайными величинами, принимающими два значения.

Ключевые слова: (B,S)-рынок, опцион, неполный рынок.

Рассмотрим (B,S) – рынок, на котором имеется один рисковый актив со стоимостью S_n в момент времени n и безрисковый актив со стоимостью B_n. Предположим, что $S_n - S_{n-1} = \xi_n$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(x)$ и $E\xi_n^2 < \infty$. На этом рынке будем рассматривать стандартный колл-опцион Европейского типа с функцией выплат $f_1 = (S_1 - K)^+ = \max(S_1 - K, 0)$, где K – цена доставки. Из второй фундаментальной теоремы теории финансовых расчетов (см. [1]) следует, что рынок является полным, если случайные величины ξ_n принимают не более двух значений. Дальнейшее изложение основано на том, что случайные величины ξ_n заменяются случайными величинами $\eta_n = g(\xi_n)$, принимающими только два значения, и такими, что $E(\xi_n - \eta_n)^2$ было бы минимальным. Ниже мы укажем правило для нахождения распределения случайных величин η_n. Так как распределения ξ_n и η_n не зависят от n, то в дальнейшем индекс n мы будем опускать.

Пусть задано $\xi \in L_2$. Рассмотрим следующую задачу: найти такое $\eta \in L_2$, принимающее не более двух значений, которое минимизирует выражение $R(\eta) = E(\xi - \eta)^2$.

Представим η в виде $\eta = aI_A + bI_{\overline{A}}$, где событие A принадлежит σ–алгебре, порожденной случайной величиной ξ. Если исходная задача имеет решение η_0, то задача для случайной величины $\xi + c$ имеет решение $\eta_0 + c, c \in \mathbf{R}$. Поэтому достаточно рассматривать такие ξ, что $E\xi = 0$.

Лемма 1. Если $\eta_0 = a_0 I_{A_0} + b_0 I_{\overline{A_0}}$ является решением исходной задачи, то $a_0 = E(\xi\,|\,A_0), b_0 = E(\xi\,|\,\overline{A_0})$, $A_0 = \arg\max R_0(A)$, $R_0(A) = \dfrac{(E\xi I_A)^2}{P(A)(1-P(A))}$.

Доказательство. $R(\eta) = E(\xi-\eta)^2 I_A + E(\xi-\eta)^2 I_{\overline{A}} = E(\xi-a)^2 I_A + {}$ $+ E(\xi-b)^2 I_{\overline{A}} = P(A)E((\xi-a)^2\,|\,A) + P(\overline{A})E((\xi-b)^2\,|\,\overline{A})$, откуда и следует, что минимум $R(\eta)$ достигается при $a_0 = E(\xi\,|\,A), b_0 = E(\xi\,|\,\overline{A})$. Подставляя a_0, b_0 в выражение для $R(\eta)$, мы завершаем доказательство леммы.

Теорема 1. Пусть $E\xi = 0$. Если $\eta_0 = a_0 I_{A_0} + b_0 I_{\overline{A_0}}$ ξ-измерима и является решением задачи, то $a_0 = E(\xi\,|\,A_0), b_0 = E(\xi\,|\,\overline{A_0})$, и найдется y, $-\infty \le y \le \infty$, что

$$\begin{aligned} &P(A_0 \circ \{\xi > y\}) = 0 \vee P(A_0 \circ \{\xi \ge y\}) = \\ &= 0 \vee P(A_0 \circ \{\xi < y\}) = 0 \vee P(A_0 \circ \{\xi \le y\}) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где символ $\circ$ обозначает симметричную разность.

Доказательство. Проверим последнее утверждение. Поскольку $R_0(A_0) = R_0(\overline{A_0})$ и выполнение (1) для A_0 равносильно выполнению (1) для $\overline{A_0}$, то можно считать $P(A_0) \le 1/2$. Кроме того, будем полагать $P(A_0) > 0$ (иначе (1) очевидно). Доказательство проведем от противного: пусть $R_0(A_0) = \max R_0(A)$, но (1) не выполняется. Пусть, для определенности, $E\xi I_{A_0} \ge 0$ (случай $E\xi I_{A_0} \le 0$ рассматривается аналогично). Обозначим $A_0^+ = A_0 \cap \{\xi \ge 0\}, A_0^- = A_0 \cap \{\xi < 0\}$. Поскольку $P(A_0) > 0$, то либо $P(A_0^-) > 0$, либо $P(A_0^-) = 0, P(A_0^+) > 0$. В первом случае рассмотрим $B \subset A_0^-$, такое, что $P(B) = P(A_0^-)/2 > 0$, и положим $A_1 = A_0 \setminus B$. Мы имеем $0 < P(A_1) < P(A_0) \le 1/2$, $E\xi I_{A_1} > E\xi I_{A_0}$, откуда $R_0(A_1) > R_0(A_0)$. Это противоречит оптимальности A_0. Рассмотрим второй случай. Так как (1) не выполняется, то

$$\forall y,\ 0 \le y < \infty\ \ (P(A_0^+ \setminus \{\xi > y\}) > 0 \vee P(\{\xi > y\} \setminus A_0^+) > 0) \wedge$$

$$\wedge (P(A_0^+ \setminus \{\xi \ge y\}) > 0 \vee P(\{\xi \ge y\} \setminus A_0^+) > 0),$$

откуда

$$\forall y,\ 0 \le y < \infty,\ P(B_y) > 0 \vee P(D_y) > 0, \tag{2}$$

где $B_y = A_0^+ \setminus \{\xi > y\}, D_y = \{\xi \ge y\} \setminus A_0^+$. Обозначим

$$c_1 = \inf\{y : P(B_y) > 0\},\ c_2 = \sup\{0; y : P(D_y) > 0\}.$$

Из (2) следует, что $0 \le c_1 \le c_2 < \infty$. Возможны две ситуации.

1. $c_1 < c_2$. Выберем c так, что $c_1 < c < c_2$. Найдутся такие $B_1^c \subset B_c$, $D_1^c \subset D_c$, что $P(B_1^c) = P(D_1^c) > 0$. Построим $A_1 = (A_0 \setminus B_1^c) \cup D_1^c$. Мы имеем $P(A_1) = P(A_0)$,

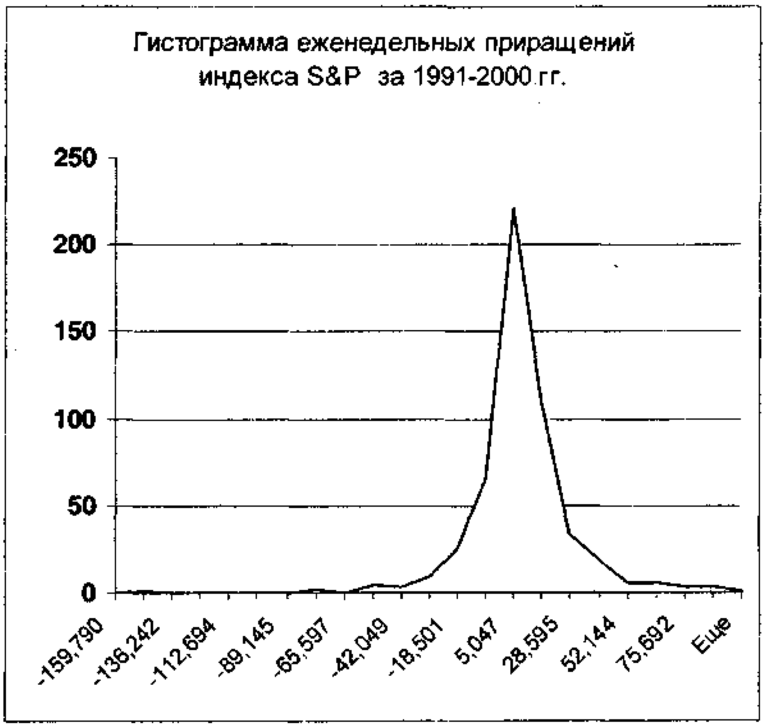
$E\xi I_{A_1} = E\xi I_{A_0^+} - E\xi I_{B_1^c} + E\xi I_{D_1^c} > E\xi I_{A_0} \geq 0$ и $R_0(A_1) > R_0(A_0)$, что противоречит оптимальности A_0.

2. $c_1 = c_2 = c$. Если $c \neq 0$, то $P(B_y) = 0, 0 \leq y < c$, откуда $P(A_0^+ \setminus \{\xi \geq c\}) = 0$. При $c = 0$ последнее равенство очевидно. Так как $P(D_y) = 0, y > c$, то $P(\{\xi > c\} \setminus A_0^+) = 0$. Если $P(A_0^+ \cap \{\xi = c\}) = 0$, то $P(A_0^+ \setminus \{\xi > c\}) = 0$ и $P(\{\xi > c\} \circ A_0^+) = 0$, что противоречит предположению. Аналогично, равенство $P(\overline{A_0^+} \cap \{\xi = c\}) = 0$ влечет $P(\{\xi \geq c\} \setminus A_0^+) = 0$ и $P(\{\xi \geq c\} \circ A_0^+) = 0$, что опять невозможно. Таким образом, $P(A_0^+ \cap \{\xi = c\}) > 0$ и $P(\overline{A_0^+} \cap \{\xi = c\}) > 0$. Противоречие с ξ-измеримостью η_0.

Следствие 1. Если существует решение задачи η_0, не являющееся ξ-измеримым, то существует ξ-измеримое решение η_1.

Следствие 2. Событие A_0 достаточно искать в виде $\{\xi \in (y, \infty)\}$, где $-\infty \leq y \leq \infty$.

Нами в качестве значений S_n были выбраны еженедельные значения закрытия индекса S&P за 1991–2000 гг. Гистограмма приращений приводится на рисунке. Приближенные значения аппроксимирующей случайной величины оказались равными –3,727 и 33,631. При этом $P(\eta = -3{,}727) = 0{,}8467$, $c = 14{,}73$. При рассмотрении двухнедельных приращений $P(\eta = -5{,}231) = 1 - P(\eta = 37{,}007) = 0{,}781$, $c = 15{,}24$.



В дальнейшем полагаем, что $S_{n-1} = S_0$, $S_n = S_1 + \xi$, $B_{n-1} = B_0$, $B_n = B_1$, $\widetilde{S}_1 = S_0 + \eta$. Тогда из второй фундаментальной теоремы следует, что существует начальный капитал x и портфель $\pi = (\beta_1, \gamma_1)$, такие, что капитал X_1^{π} в момент 1 будет равен

$$X_2^{\pi} = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1 = \widetilde{f}_1 = (\widetilde{S}_1 - K)^+, \quad x = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0.$$

Портфель π и начальный капитал x, являющийся аппроксимацией стоимости опциона, находятся следующим образом:

$$x = \frac{B_0}{B_1} E^*(S_0 + \eta - K)^+,$$

где E^* означает математическое ожидание, взятое по мере $P(a_0) = p*$, $P(b_0) = 1 - p^*$. Значение p^* находится из соотношения $E^*\left(\frac{\widetilde{S}_1}{B_1}\right) = \frac{S_0}{B_0}$.

Мы имеем

$$p^* = \frac{b_0 B_0 - S_0(B_1 - B_0)}{(b_0 - a_0)B_0},$$

$$\gamma_1 = \frac{(S_0 + b_0 - K)^+ - xB_1}{B_0 b_0 - S_0(B_1 - B_0)},$$

$$\beta_1 = \frac{x}{B_0} - \gamma_1 \frac{S_0}{B_0}.$$

Сравним $(S_1 - K)^+$ и $(\widetilde{S}_1 - K)^+$, взяв в качестве K среднее значение индекса S&P за упомянутый период. Оценка среднего стандартного отклонения составила 14,863, а коэффициента вариации – 0,09 для недельных приращений, а для двухнедельных приращений – 19,522 и 0,119 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической и финансовой математики. М.: ФАЗИС, 1998. 544 с.