НЕРАВНОМЕРНАЯ ОЦЕНКА В ЦПТ В УСЛОВИЯХ β-ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Н. М. Зуев, Я. Б. Кошкин

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: ykoshkin@tut.by

Получена неравномерная оценка в ЦПТ для β-зависимых случайных величин, $\beta(m) \le C_0 e^{-\gamma m}, \gamma > 0$, с равномерно ограниченными s-тыми моментами, $s \ge 3$, s – целое.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, ЦПТ, неравномерная оценка, зависимость, β-перемешивание, равномерно сильное перемешивание.

Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$. Обозначим $\sigma_n = E^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$, $S_n = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $F_n(x) = P\{S_n \le x\}$. Также положим $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp(-z^2/2)dz$. Пусть $\Im_a^b$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами X_j, $j \in [a,b]$.

Определение. Коэффициентом равномерно сильного (или β) перемешивания называют $\beta(\tau) = \sup\limits_{t, A \in \Im_0^t, B \in \Im_{t+\tau}^{\infty}} |P(A) - P(A \mid B)|$.

Теорема 1. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность случайных величин с коэффициентом β-перемешивания $\beta(\tau) \le C_0 e^{-\gamma\tau}, \gamma > 0$, $E|X_i|^s \le \overline{C}$, $\overline{C} < \infty$, $s \ge 3$, s – целое, $EX_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, $\sigma_n \ge B_0\sqrt{n}$, $B_0 > 0$. Тогда при $s \ge 4$ найдется C, не зависящее от x и n, что

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{C}{1+|x|^s}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

При $s = 3$ существует C, не зависящее от x и n, такое, что

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{C}{1+|x|^3}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \ x \ge \sqrt{\ln n},$$

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{C}{1+|x|^3} \frac{\ln^{5/2} n}{\sqrt{n}}, \; x < \sqrt{\ln n}\,.$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится несколько лемм. Введем дополнительные обозначения. Пусть

$$f_n(t) = E\exp(itS_n), \; S_j^{(0)} = S_n,$$

$$S_j^{(r)} = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{|l-j|>rm} X_l, \; \widetilde{S}_j^{(r)} = S_j^{(r-1)} - S_j^{(r)}, \; \xi_j^{(r)} = \exp\left(it\widetilde{S}_j^{(r)}\right) - 1, \; r \ge 1,$$

$$\zeta_j^{(r)} = X_j \prod_{l=1}^{r-1} \xi_j^{(l)}, \; r \ge 2\,.$$

Обозначим для краткости оператор $D_t^{\nu} = \dfrac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}$, $a \vee b = \max\{a,b\}, a \wedge b = \min\{a,b\}$.

Мы будем считать, что $r \le k = [k_0 \log_2 n] + 1$, $m = [b_0 \ln n] + 1$ для достаточно больших $k_0 < \infty, b_0 < \infty$; $|t| \le T$, где $T \le h_0 \dfrac{\sigma_n}{m}$ при достаточно малом $h_0 > 0$.

Под B, B_i, C, C_i в дальнейшем мы будем понимать абсолютные константы, которые могут зависеть лишь от $s, B_0, \overline{C}, \gamma, k_0, b_0, h_0$. Эти константы могут отличаться в разных соотношениях. Более того, они могут быть разными даже в разных частях одного неравенства.

Определение. Непрерывную при $|t| \le T$ и q раз дифференцируемую по t на множествах $|t| \le 1$ и $1 \le |t| \le T$ функцию $\theta(t)$ назовем q-ограниченной, если выполняются неравенства

$$\left|D_t^{\nu}\theta(t)\right| \le 1, |t| \le 1, 1 \le |t| \le T, \nu = \overline{0,q}, \tag{1}$$

$$\left|D_t^{q}\theta(t) - D_t^{q}\theta(0)\right| \le B|t|^{\delta}, |t| \le 1 \tag{2}$$

для некоторого $\delta, 0 < \delta \le 1$.

Определение. q раз дифференцируемую по t на множестве $|t| \le 1$ функцию $\theta(t)$ назовем q-ограниченной в нуле, если выполняются неравенства

$$\left|D_t^{\nu}\theta(t)\right| \le 1, |t| \le 1, \; \nu = \overline{0,q}\,, \; \left|D_t^{q}\theta(t) - D_t^{q}\theta(0)\right| \le B|t|^{\delta}, |t| \le 1$$

для некоторого $\delta, 0 < \delta \le 1$.

Лемма 1. В условиях теоремы 1 справедливы представления

$$E\zeta_j^{(r)} = B_1\theta_1(t)(1 \vee t^2)\left(\frac{1}{4^r}\frac{m}{\sigma_n^2} + 3^r\beta(m)\right), \; r \ge 3\,,$$

$$EX_j\left(\exp(it\widetilde{S}_j^{(1)}) - 1 - it\widetilde{S}_j^{(1)}\right) = B_2\theta_2(t)(1 \vee t^2)\frac{m}{\sigma_n^2}\,,$$

$$E\zeta_j^{(k+1)}\exp(itS_j^{(k)})=B_3\theta_3(t)\left(\frac{1}{m^{k/8}}+3^k\beta(m)\right),$$

$$E\zeta_j^{(r)}\left(\exp(itS_j^{(r)}-E\exp(itS_j^{(r)})\right)=B_4\theta_4(t)2^r\exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right),\ r\ge 2,$$

$$EX_j\left(\exp itS_j^{(1)}\right)=B_5\theta_5(t)\exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right),$$

$$E\left(\exp(itS_n)-\exp\left(itS_j^{(r)}\right)\right)=B_6\theta_6(t)\frac{mr}{\sigma_n^2}(1\vee t^2)f_n(t)+$$

$$+B_7\theta_7(t)3^k\exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right)+B_8\theta_8(t)\frac{1}{4^k},$$

$$\sum_{j=1}^{n}E\zeta_j^{(r)}\exp(itS_j^{(r)})-f_n(t)\sum_{j=1}^{n}E\zeta_j^{(r)}=$$

$$=B_9\theta_9(t)\frac{1}{2^r}\frac{nm}{\sigma_n^2}(1\vee t^2)f_n(t)+B_{10}\theta_{10}(t)n3^k\exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right)+B_{11}\theta_{11}(t)\frac{n}{4^k},\ r\ge 2,$$

$$\frac{i}{\sigma_n}\sum_{j=1}^{n}E\zeta_j^{(2)}=-t+B_{12}\theta_{12}(t)\frac{nm}{\sigma_n^3}(1\vee t^2)+B_{13}\theta_{13}(t)t\exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right),$$

где $\theta_i(t)$ непрерывны, $s-1$ раз дифференцируемы по t на множествах $|t|\le 1$ и $1\le|t|\le T$ и удовлетворяют (1) при $q=s-1$. Если к тому же выполняется неравенство

$$|X_i|\le a=\frac{\sigma_n}{\sqrt{m}}, \tag{3}$$

то справедливо также (2) с $q=s-1, \delta=1$.

Лемма 1 доказывается с использованием известных оценок ковариации в условиях β-перемешивания (см., напр., [2]) и моментных неравенств (см., напр., [4]).

Лемма 2. Для q раз дифференцируемой функции $\theta(t)$ условие (2) эквивалентно условию

$$\theta^{(\nu)}(t)=\sum_{j=\nu}^{q}\frac{\theta^{(j)}(0)}{(j-\nu)!}t^{j-\nu}+\varepsilon_\nu(t),$$

$$|\varepsilon_\nu(t)|\le B|t|^{q-\nu+\delta},\ |t|\le 1,\ 0<\delta\le 1,\ \nu=\overline{0...q}.$$

Доказательство можно получить, воспользовавшись формулой Тейлора – Лагранжа.

Далее под $\theta_i(t)$ мы будем понимать q-ограниченные функции. Эти функции могут быть разными в разных соотношениях. Кроме того, они могут отличаться даже в разных частях одного соотношения.

Лемма 3. В условиях теоремы 1 в предположении (3) справедливы представления

$$f_n'(t)=-tf_n(t)+f_n(t)(\theta_1(t)G_1t+\theta_2(t)G_2(1\vee t^2))+\theta_3(t)Q_0, \tag{4}$$

$$f_n(t) = \int_0^t\left(-x + \theta_1(x)G_1 x + \theta_2(x)G_2(1 \vee x^2)\right)dx +$$
$$+ \int_0^t \theta_3(u)Q_0 \exp \int_u^t\left(-z + \theta_1(z)G_1 z + \theta_2(z)G_2(1 \vee z^2)\right)dz du\,, \qquad (5)$$

где

$$G_1 = B_1 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right),\ G_2 = B_2\frac{m}{\sqrt{n}},\ Q_0 = B_3\left(\sqrt{n}4^k \exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right) + \frac{\sqrt{n}}{2^k}\right),$$

причем $\theta_i(t)$ $s-1$-ограничены.

Доказательство. Используя разложение

$$f_n'(t) = \frac{i}{\sigma_n}\sum_{j=1}^n EX_j e^{itS_j^{(1)}} + \sum_{r=2}^k \frac{i}{\sigma_n}\sum_{j=1}^n E\zeta_j^{(r)} e^{itS_j^{(r)}} + \frac{i}{\sigma_n}\sum_{j=1}^n E\zeta_j^{(k+1)} e^{itS_j^{(k)}}$$

и лемму 1, мы получаем

$$f_n'(t) = \frac{i}{\sigma_n}\left(\sum_{j=1}^n EX_j e^{itS_j^{(1)}} + \sum_{r=2}^k\left(\sum_{j=1}^n E\zeta_j^{(r)}e^{itS_j^{(r)}} - f_n(t)\sum_{j=1}^n E\zeta_j^{(r)}\right) + f_n(t)\sum_{j=1}^n E\zeta_j^{(r)} +\right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^n E\zeta_j^{(k+1)} e^{itS_j^{(k)}}\right) = B_1\theta_1(t)\frac{n}{\sigma_n}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right) +$$
$$+ f_n(t)\left(-t + B_2\theta_2(t)\frac{nm}{\sigma_n^3}(1 \vee t^2) + B_3\theta_3(t)t\exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right)\right) +$$
$$+ \sum_{r=3}^k\left(\left(B_{4,r}\theta_{4,r}(t)3^k\frac{n}{\sigma_n}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right) + \frac{n}{\sigma_n}\frac{1}{4^k} + \frac{1}{2^r}\frac{nm}{\sigma_n^3}(1 \vee t^2)f_n(t)\right) +\right.$$
$$\left. + B_{7,r}\theta_{7,r}(t)\frac{n}{\sigma_n}\frac{1}{2^r}\frac{m}{\sigma_n^2}(1 \vee t^2)f_n(t)\right) + B_8\theta_8(t)\frac{n}{\sigma_n}\frac{1}{2^k} =$$
$$= -tf_n(t) + \left(B_1\theta_1(t)\frac{m}{\sqrt{n}}(1 \vee t^2) + B_2\theta_2(t)t\exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right)\right)f_n(t) +$$
$$+ B_3\theta_3(t)\sqrt{n}4^k\exp\left(-\frac{\gamma}{2}m\right) + B_4\theta_4(t)\frac{\sqrt{n}}{2^k}.$$

Таким образом, мы доказали (4). Равенство (5) является записью решения задачи Коши для дифференциального уравнения (4) с начальным условием $f_n(0) = 1$.

Лемма 4. При $|t| \le 1$ имеет место равенство

$$f_n(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} + B_1\theta_1(t)G_1 + B_2\theta_2(t)G_2\right) + B_3\theta_3(t)Q_0,$$

где $\theta_i(t)$ являются s-ограниченными в нуле.

Доказательство следует из (5).

Лемма 5. При $T \le \frac{m}{\sigma_n} \wedge \frac{1}{2G_2}$ выполняется неравенство

$$\int_{-T}^{T} \frac{\left|f_n(t) - \exp(-t^2/2)\right|}{|t|} dt \le B\left(G_1 + G_2 + Q_0 T\right).$$

Доказательство производится аналогично (см. [1], с. 51–52).

Лемма 6. Если $F(x), G(x)$ – функции распределения, $|G'(x)| \le K\left(1 + |x|^{-s}\right)$, то

$$|F(x) - G(x)| \le \frac{C_s}{1+|x|^s}\left(\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt + \int_{-T}^{T}\left|\frac{\delta_s(t)}{t}\right|dt + \frac{K}{T}\right), T > 1,$$

где $f(t)$, $g(t)$ – сответствующие характеристические функции, C_s – константа, зависящая лишь от s, $\delta_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(x^s (F(x) - G(x))\right)$.

Лемма 7. Пусть $G(x)$ – функция ограниченной вариации на **R**, $g(t)$ – ее преобразование Фурье – Стилтьеса, $G(x) \to 0, |x| \to \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^m |dG(x)| < \infty, m \ge 1, m \in \mathbf{N}$. Тогда функция $x^m G(x)$ имеет ограниченную вариацию на **R** и

$$(-it)^m \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(x^m G(x)\right) = m! \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-t)^\nu}{\nu!} D_t^\nu g(t).$$

Доказательства лемм 6, 7 приведены в [3].

Лемма 8. В условиях теоремы 1 в предположении (3) при целых $s \ge 3$ найдется C, не зависящее от x и n, что

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{C}{1+|x|^s} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство. 1. Пусть $|t| \le 1$. Обозначим $G_n(t) = G_1\theta_1(t) + G_2\theta_2(t)$, $Q_n(t) = Q_0\theta_3(t), B_n(t) = \exp(G_n(t))$, $H_l(t) = \exp(t^2/2) D_t^l \exp(-t^2/2), l = \overline{0,s}$. Тогда

$$f_n^{(l)}(t) = \sum_{j=0}^{l} C_l^j H_j(t) \exp(-t^2/2) B_n^{(l-j)}(t) + Q_n^{(l)}(t), \overline{l = 0, s}.$$

Так как $B_n^{(l)}(t) = P_{n,l}(t) B_n(t)$, где $P_{n,l}(t)$ – полином относительно $G_i\theta_i^{(\nu)}(t)$, $i = 1,2;\ \nu = \overline{1,l},\ l = \overline{1,s}$, не содержащий свободного члена, то $P_{n,l}^*(t) = P_{n,l}/G_*$ является полиномом относительно $\theta_i^{(\nu)}(t)$ с ограниченными по n коэффициентами (такие полиномы для краткости мы будем называть ограниченными полиномами), где $G_* = G_1 \wedge G_2$, $i = 1,2;\ \nu = \overline{1,l},\ l = \overline{1,s}$. Далее,

$$f_n^{(l)}(t) - D_t^l \exp(-t^2/2) = \exp(-t^2/2) H_l(t) \exp(G_n(t) - 1) +$$
$$+ G_* B_n(t) \exp(-t^2/2) \textstyle\sum_{j=0}^{l-1} C_l^j H_j(t) P_{n,l}^*(t) + Q_0 Q_{n,l}^*(t),$$

где $Q_{n,l}^{*}(t)$ – ограниченный полином относительно $\theta_3^{(\nu)}(t)$, $\nu=\overline{0,l}$, $l=\overline{0,s}$ Используя лемму 1, мы получаем

$$G_n(t)=G_*(p_{n,1}(t)+t^{s+\delta}\alpha_{n,1}(t)).$$

Раскладывая $\exp(G_n(t))-1$ по Тейлору в нуле, заключаем, что

$$B_n(t)=1+G_*(p_{n,2}(t)+t^{s+\delta}\alpha_{n,2}(t)),$$

где $p_{n,i}(t)$ – ограниченные полиномы степени не выше s. $\left|\alpha_{n,i}(t)\right|\le C_i, |t|\le 1$. Аналогично,

$$P_{n,l}^{*}(t)=p_{n,l,3}(t)+t^{s-l+\delta}\alpha_{n,l,3}(t),\ \ \exp(-t^2/2)=p_{n,4}(t)+t^{s+1}\alpha_{n,4}(t).$$

Обозначая $M_*=G_*\wedge Q_0$, имеем

$$f_n^{(l)}(t)-D_t^l\exp(-t^2/2)=M_*(p_{n,l}^{*}(t)+t^{s-l+\delta}\alpha_{n,l}^{*}(t)),$$

где $p_{n,l}^{*}(t)$ – ограниченные полиномы степени не выше $s-l$, $\left|\alpha_{n,l}^{*}(t)\right|\le C_i^{*}, |t|\le 1$.

Пусть $A_n(t)=(-it)^s\delta_s(t)$. Из предыдущего равенства и леммы 7 следует, что $A_n(t)=M_*(p_n(t)+t^{s+\delta}\alpha_n(t))$, с $p_n(t)$ и $\alpha_n(t)$, обладающими теми же свойствами. С другой стороны, $\left.\dfrac{A_n(t)}{t^l}\right|_{t=0}=0, l=\overline{0,s}$, откуда $p_n(t)\equiv 0$, так как $p_n(t)$ – полином степени не выше s. Окончательно

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{\delta_s(t)}{t}\right|dt\le C_5M_*\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{t^{1-\delta}}\right|dt=C_6M_*.$$

2. Пусть $|t|\ge 1$. Обозначим $G_n(t)=\int_0^t\left(\theta_1(x)G_1+\theta_2(x)G_2x^2\right)dx$, $Q_n(t)=Q_0\theta_3(t)$, $B_n(t)=\exp(G_n(t)), l=\overline{0,s}$. Из (5) мы имеем

$$f_n(t)=\exp(-t^2/2)B_n(t)+\exp(-t^2/2)B_n(t)\int_0^tQ_n(u)\exp(u^2/2)B_n^{-1}(u)du. \qquad (6)$$

Отметим, что $B_n^{(l)}(t)=G_*P_{n,l}^{*}(t)B_n(t)$, $Q_n^{(l)}(t)=Q_0Q_{n,l}^{*}(t)$, где $P_{n,l}^{*}(t)$ является ограниченным полиномом относительно $\theta_i^{(\nu)}(t)t^p, \nu=\overline{0,l-1}$, $i=1,2,\ 0<p\le 2s$, а $Q_{n,l}^{*}(t)$ является ограниченным полиномом относительно $\theta_3^{(\nu)}(t), \nu=\overline{0,l-1}$, $i=3,4, 0<p\le 2$, $l=\overline{1,s}$. Введем дополнительно

$$\widetilde{H}_l(t)=\exp(-t^2/2)D_t^l\exp(t^2/2),\ \ l=\overline{0,s},$$

$$R_{n,l}(t)=\sum_{j=0}^{l-1}C_l^jH_j(t)P_{n,l-j}^{*}(t),\ l=\overline{1,s},\ R_{n,0}(t)=0;\ T_{n,l}(t)=H_l+G_*R_{n,l}(t), l=\overline{0,s},$$

$$\widetilde{R}_{n,l}(t)=\sum_{j=0}^{l-1}C_l^j\widetilde{H}_j(t)P_{n,l-j}^{*}(t),\ l=\overline{1,s},\ \widetilde{R}_{n,0}(t)=0;\ \widetilde{T}_{n,l}(t)=\widetilde{H}_l+G_*\widetilde{R}_{n,l}(t), l=\overline{0,s}.$$

В этих обозначениях справедливы равенства

$$D_t^l(\exp(-t^2/2)B_n(t)) = \exp(-t^2/2)B_n(t)T_{n,l}(t),$$
$$D_t^l(\exp(t^2/2)B_n^{-1}(t)) = \exp(t^2/2)B_n^{-1}(t)\widetilde{T}_{n,l}(t)$$
$$D_t^l(\exp(-t^2/2)(B_n(t)-1)) = \exp(-t^2/2)[H_l(t)(B_n(t)-1) + G_* B_n(t)R_{n,l}(t)],\ l=\overline{0,s}.$$

Дифференцируя $l \le s$ раз равенство (6), мы получаем

$$f_n^{(l)}(t) - D_t^l \exp(-t^2/2) = \exp(-t^2/2)[H_l(t)(B_n(t)-1) + G_* B_n(t)R_{n,l}(t) +$$
$$+ Q_0 \exp(-t^2/2)B_n(t)T_{n,l}(t)\int_0^t Q_{n,0}^*(u)\exp(u^2/2)B_n^{-1}(u)du +$$
$$+ Q_0 B_n(t)\sum_{j=0}^{l-1} C_l^j T_{n,j}(t)\exp(t^2/2)B_n^{-1}(t)\sum_{k=0}^{l-1-j} C_{l-1-j}^k \widetilde{T}_{n,k}(t)Q_{n,l-1-j-k}^*(t)] =$$
$$= \exp(-t^2/2)H_l(t)(B_n(t)-1) + G_* \exp(-t^2/2)B_n(t)R_{n,l}(t) +$$
$$+ T_{n,l}(t)\int_0^t \theta_3(u)Q_0 \exp\int_u^t(-z + \theta_1(z)G_1 z + \theta_2(z)G_2 z^2)dzdu +$$
$$+ Q_0 \sum_{j=0}^{l-1}\sum_{k=0}^{l-1-j} C_l^j C_{l-1-j}^k T_{n,j}(t)\widetilde{T}_{n,k}(t)Q_{n,l-1-j-k}^*(t).$$

Так как $\left|\exp(-t^2/2)B_n(t)\int_0^t Q_n(u)\exp(u^2/2)B_n^{-1}(u)du\right| \le Q_0|t|$ при $|t| \le 1/2G_2$, (см.[1], с. 51, 52), $\exp(G_n(t)-1) \le |G_n(t)|B_n(t)$, а также поскольку $|t|^i \le |t|^j, i \le j$, то

$$\left|f_n^{(l)}(t) - D_t^l \exp(-t^2/2)\right| \le B_1 G_* |t|^{p_l} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + G_1\frac{t^2}{2} + G_2 t^3\right) + B_2 Q_0 |t|^{p_l}$$

для $p_l < \infty$, зависящих лишь от l. Тогда

$$\left|\frac{\delta_s(t)}{t}\right| \le B_3 G_* |t|^{p_s} \exp(-t^2/8) + B_4 Q_0 |t|^{p_s},\ p_s > 0,$$

и верно

$$\int_{1\le|t|\le T}\left|\frac{\delta_s(t)}{t}\right|dt \le B_5 G_* + B_6 Q_0 T^p$$

при достаточно большом $p = p(s)$.

Доказательство леммы завершается применением лемм 5 и 6.

Откажемся от предположения (3). Положим $Y_i = X_i I\{X_i \le a\}$, $\overline{Y}_i = X_i - Y_i$, $Z_i = Y_i - EY_i$, $\widetilde{\sigma}_n = E^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^2$, $S_n(Y) = \frac{1}{\widetilde{\sigma}_n}\sum_{i=1}^n Y_i$, $S_n(Z) = \frac{1}{\widetilde{\sigma}_n}\sum_{i=1}^n Z_i$, $G_n(x) = P\{S_n(Z) \le x\}$, $H_n(x) = P\{S_n(Y) \le x\}$

Лемма 9. Справедливы следующие утверждения:

1. Для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon) < \infty$, что при $n > n_0$ справедливо неравенство $(1-\varepsilon)\sigma_n \le \widetilde{\sigma}_n \le (1+\varepsilon)\sigma_n$.

2. $\left|G_n(x) - H_n(x)\right| \le \dfrac{B}{1+|x|^s}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ для всех x.

3. $\left|F_n(x) - H_n(x)\right| \le \dfrac{C}{1+|x|^s}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ для всех x при $s \ge 4$ и $x \ge \sqrt{\ln n}$ при $s = 3$.

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 8 и 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зуев Н. М.* Предельные теоремы для слабо зависимых случайных величин. Мн.: БГУ, 2000. 118 с.

2. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

3. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. 414 с.

4. *Утев С. А.* Суммы случайных величин с условием φ-перемешивания // Асимптотический анализ распределений случайных процессов. Новосибирск: Наука, 1989.