СИНХРОННЫЙ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОТОК СОБЫТИЙ ПРИ ПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

А. М. Горцев, Л. А. Нежельская

Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: amg@fpmk.tsu.ru

Рассмотрена задача оценивания длительности мертвого времени и параметров синхронного дважды стохастического потока событий. Условия наблюдения за потоком таковы, что каждое событие потока порождает период мертвого времени, в течение которого другие события потока недоступны наблюдению (случай продлевающегося мертвого времени). Находится преобразование Лапласа плотности вероятностей интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке. Выписывается уравнение моментов для оценки длительности мертвого времени.

Ключевые слова: синхронный поток событий, мертвое время, плотность вероятностей, преобразование Лапласа, оценка.

В настоящей статье проводится исследование, связанное с оцениванием длительности мертвого времени синхронного дважды стохастического потока событий и являющееся непосредственным продолжением исследований, проведенных в работе [1]. Коротко напомним, что в реальных ситуациях, как правило, полезная информация в течение некоторого времени оказывается недоступной для наблюдения. Одним из основных искажающих факторов полезной информации выступает мертвое время регистрирующих приборов [2], в течение которого зарегистрированное событие обрабатывается, другие же события, поступившие в этот период, теряются. При этом регистрирующие приборы делятся на две группы: приборы с непродлевающимся мертвым временем (приборы первого рода); приборы с продлевающимся мертвым временем (приборы второго рода). Непродлевающееся мертвое время не зависит от других событий в период его действия. Напротив, продлевающееся мертвое время возникает после каждого события, наступившего в период действия мертвого времени, вне зависимости от факта регистрации этого события.

В [1] проведены исследования синхронного дважды стохастического потока событий в случае непродлевающегося мертвого времени и приведены работы, связанные с исследуемой тематикой, для пуассоновского, асинхронного альтернирующего и асинхронного потоков событий. Кроме того, в работах [3, 4] получены результаты для полусинхронного дважды стохастического потока событий в схеме с непродлевающимся мертвым временем и асинхронного дважды стохастического потока событий в схеме с продлевающимся мертвым временем соответственно.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается синхронный дважды стохастический (далее синхронный) поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса, если $\lambda(t) = \lambda_1$, и, наоборот, имеет место второе состояние процесса, если $\lambda(t) = \lambda_2$. Если имеет место первое состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_1$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_1. Если – второе состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_2$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_2. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе состояние возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из второго состояния в первое возможен также только в момент наступления события и осуществляется с вероятностью q ($0 < q \leq 1$); с вероятностью $1-q$ процесс $\lambda(t)$ остается во втором состоянии. Так как переходы из состояния в состояние привязаны к моментам наступления событий, то поток называется синхронным дважды стохастическим потоком событий. Очевидно, что в сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – марковский процесс.

После каждого наступившего события потока реализуется период ненаблюдаемости событий фиксированной длительности T (мертвое время), который порождается этим событием, так что другие события исходного потока, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению. В то же время, хотя события и не наблюдаются в течение периода мертвого времени, они вызывают продление периода ненаблюдаемости на ту же величину T, так что наблюдаться будет лишь то событие, которое наступило после окончания последнего периода мертвого времени. По окончании общего периода ненаблюдаемости первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т. д.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения пренебрегаем. Так как процесс $\lambda(t)$ является ненаблюдаемым, а наблюдаемыми являются только временные моменты $t_1, t_2, \ldots$ наступления событий в наблюдаемом потоке, то необходимо по этим наблюдениям оценить (в момент окончания наблюдений) длительность мертвого времени T.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВРЕМЕННОГО ИНТЕРВАЛА МЕЖДУ СОСЕДНИМИ СОБЫТИЯМИ В НАБЛЮДАЕМОМ ПОТОКЕ

Нетрудно показать, что наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать начиная с момента наступления события t_i. Это означает, что последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \ldots$ образует вложенную цепь Маркова. В силу стационарности случайного процесса $\lambda(t)$ следует, что плотность вероятностей временного интервала между соседними событиями $p(\tau_i) = p(\tau)$ для всех i, где $\tau_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Перейдем к нахождению преобразования Лапласа плотности $p(\tau)$. Обозначим общую длительность мертвого времени через ξ. Наблюдаемое событие создало период ненаблюдаемости длительности T. Тогда $\xi = T$, если в течение этого времени событий исходного синхронного потока не наступит (мертвое время не продлится). Тогда вероятность этой ситуации есть функция Пальма [5]

$$\varphi_0(T) = \int_T^\infty \widetilde{p}(\tau)d\tau, \ \ \widetilde{p}(\tau) = \gamma\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau} + (1-\gamma)\lambda_2 e^{-\lambda_2\tau}, \ \tau \geq 0, \tag{1}$$

где $\gamma = \dfrac{q}{p+q}$, $\widetilde{p}(\tau)$ – плотность вероятностей интервала между соседними событиями в исходном синхронном потоке [6]. Взяв интеграл в (1), находим

$$\varphi_0(T) = \gamma e^{-\lambda_1 T} + (1-\gamma)e^{-\lambda_2 T}. \tag{2}$$

Однократное продление периода ненаблюдаемости на какое-то время будет в том случае, если на интервале $(0, T)$ в некоторый момент времени x_1 ($0 < x_1 < T$) наступит событие исходного синхронного потока, а затем после момента x_1 на интервале длиной T, который порожден наступившим в момент времени x_1 событием, событий исходного синхронного потока больше не наступит. Вероятность описанной ситуации равна $\widetilde{p}(x_1)dx_1\varphi_0(T)$, при этом $\xi = x_1 + T$ ($T < \xi < 2T$). При двукратном продлении периода ненаблюдаемости должны наступить два события на бесконечно малых полуинтервалах $[x_1, x_1 + dx_1)$, $[x_1 + x_2, x_1 + x_2 + dx_2)$ ($0 < x_1 < T$, $0 < x_2 < T$), а затем на интервале длиной T, который порожден наступившим в момент времени x_2 событием, событий исходного синхронного потока больше не наступит. Вероятность описанной ситуации равна $\widetilde{p}(x_1)dx_1\widetilde{p}(x_2)dx_2\varphi_0(T)$, при этом $\xi = x_1 + x_2 + T$ ($T < \xi < 3T$). Аналогично рассматривается трехкратное, четырехкратное и т. д. продление периода ненаблюдаемости. Объединяя все эти случаи, для плотности вероятностей $p(\xi)$ общей длительности периода ненаблюдаемости ξ можно записать:

$$p(\xi) = \varphi_0(T)\delta(\xi - T) + \varphi_0(T)\int_0^T \delta(\xi - x_1 - T)\widetilde{p}(x_1)dx_1 +$$

$$+ \varphi_0(T)\int_0^T\int_0^T \delta(\xi - x_1 - x_2 - T)\widetilde{p}(x_1)\widetilde{p}(x_2)dx_1dx_2 + \ldots,$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция, $\varphi_0(T)$ определена формулой (2). Переходя к преобразованию Лапласа плотности $p(\xi)$, получаем

$$g_\xi(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi}p(\xi)d\xi = \varphi_0(T)e^{-sT}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^T e^{-sx}\widetilde{p}(x)dx\right]^n. \tag{3}$$

Так как $\int_0^T e^{-sx}\tilde{p}(x)dx<1$, то бесконечный ряд в (3) есть сходящаяся геометрическая прогрессия. Тогда, подставляя в (3) $\tilde{p}(x)$ из (1) и взяв интеграл, находим:

$$g_\xi(s)=\varphi_0(T)e^{-sT}\left\{1-\frac{\gamma\lambda_1}{\lambda_1+s}\left[1-e^{-(\lambda_1+s)T}\right]-\frac{(1-\gamma)\lambda_2}{\lambda_2+s}\left[1-e^{-(\lambda_2+s)}\right]\right\}^{-1}. \qquad (4)$$

В частности, математическое ожидание длительности периода ненаблюдаемости определится в виде

$$M(\xi)=-g_\xi'(s)\big|_{s=0}=\left[1-\left(\pi_1e^{-\lambda_1T}+\pi_2e^{-\lambda_2T}\right)\right]\left[\bar{\lambda}\varphi_0(T)\right]^{1}, \qquad (5)$$

где $\bar{\lambda}=\lambda_1\pi_1+\lambda_2\pi_2$; $\pi_1=q\lambda_2(p\lambda_1+q\lambda_2)^{-1}$, $\pi_2=p\lambda_1(p\lambda_1+q\lambda_2)^{-1}$ — стационарные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ [6].

Рассмотрим теперь интервал времени между событиями в наблюдаемом потоке $\tau_i=t_{i+1}-t_i$. С другой стороны, длительность этого интервала равна $\tau=\xi+\eta$, где η – длительность интервала между моментом окончания общего периода мертвого времени ξ и моментом t_{i+1} (момент наступления очередного, после момента t_i, события в наблюдаемом потоке). Индекс i при τ опущен, т. к. $p(\tau_i)=p(\tau)$ для любых i, и поэтому можно рассматривать произвольный интервал. В силу того, что наблюдаемый поток является потоком с последействием, величины ξ и η зависимы. Тогда по формуле свертки имеем: $p(\tau)=\int_0^\tau p(\xi)p(\eta\mid\xi)d\xi=\int_0^\tau p(\xi)p(\tau-\xi\mid\xi)d\xi$. Найдем выражение для $p(\tau-\xi\mid\xi)$.

Припишем моменту наступления события в наблюдаемом потоке t_i момент $\tau=0$. Рассмотрим интервал $(0,\tau)=(0,\xi+\eta)$. Зафиксируем ξ. Введем в рассмотрение вероятности $p_{ij}(\tau-\xi)$ – условная вероятность того, что на интервале длительности $\eta=\tau-\xi$ не наступит событий наблюдаемого потока и в момент времени τ будет иметь место $\lambda(\tau)=\lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau=\xi$ имеет место $\lambda(\xi)=\lambda_i$ ($i,j=1,2$). Тогда в силу определения синхронного потока имеем

$$p_{11}(\tau-\xi)=e^{-\lambda_1(\tau-\xi)},\ p_{22}(\tau-\xi)=e^{-\lambda_2(\tau-\xi)},\ p_{12}(\tau-\xi)=p_{21}(\tau-\xi)=0. \qquad (6)$$

Введем в рассмотрение вероятности $P_i(\tau-\xi)=p_{i1}(\tau-\xi)+p_{i2}(\tau-\xi)$ – условная вероятность того, что на интервале (ξ,τ) событий наблюдаемого потока не произойдет при условии, что в момент времени $\tau=\xi$ имеет место $\lambda(\xi)=\lambda_i$ ($i=1,2$). Тогда условная плотность вероятностей длительности интервала (ξ,τ) по определению есть $p_i(\tau-\xi)=-P_i'(\tau-\xi)$, $i=1,2$. Учитывая (6), находим

$$p_1(\tau-\xi)=\lambda_1e^{-\lambda_1(\tau-\xi)},\ p_2(\tau-\xi)=\lambda_2e^{-\lambda_2(\tau-\xi)}. \qquad (7)$$

Введем в рассмотрение вероятности $\pi_i(\tau\mid\xi)$ – условная вероятность того, что в момент времени τ процесс $\lambda(\tau)$ примет значение λ_i ($i=1,2$) при условии, что в момент времени $\tau=0$ событие наступило и наступило мертвое время длительности ξ. Тогда

$$p(\tau-\xi\mid\xi)=\pi_1(\tau=\xi\mid\xi)p_1(\tau-\xi)+\pi_2(\tau=\xi\mid\xi)p_2(\tau-\xi). \tag{8}$$

Выписав систему дифференциальных уравнений для вероятностей $\pi_i(\tau\mid\xi)$ и решив ее, находим

$$\pi_1(\tau\mid\xi)=A_1(\xi)+A_2(\xi)e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\tau},\ \pi_2(\tau\mid\xi)=\frac{p\lambda_1}{q\lambda_2}A_1(\xi)-A_2(\xi)e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\tau}, \tag{9}$$

где $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$ – константы, которые определяются из граничных условий:

$$\pi_1(0\mid\xi)=A_1(\xi)+A_2(\xi),\ \pi_2(0\mid\xi)=\frac{p\lambda_1}{q\lambda_2}A_1(\xi)-A_2(\xi). \tag{10}$$

В (10) $\pi_i(0\mid\xi)$ – условная (финальная) вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau=0$ находится в состоянии i ($i=1,2$) при условии, что в этот момент времени событие в наблюдаемом потоке наступило и наступило мертвое время длительности ξ ($\pi_1(0\mid\xi)+\pi_2(0\mid\xi)=1$). С учетом того, что в момент $\tau=0$ процесс $\lambda(\tau)$ может терпеть разрыв 1-го рода и в этот же момент времени производится розыгрыш состояний процесса $\lambda(\tau)$, получаем:

$$\begin{aligned}\pi_1(0\mid\xi)&=\pi_1(0-0\mid\xi)(1-p)+\pi_2(0-0\mid\xi)q,\\ \pi_2(0\mid\xi)&=\pi_2(0-0\mid\xi)(1-q)+\pi_1(0-0\mid\xi)p,\end{aligned} \tag{11}$$

где $\pi_i(0-0\mid\xi)=\lim\pi_i(\tau\mid\xi)$ при $\tau\to0-0$, $i=1,2$. Так что $\pi_i(0\mid\xi)=\pi_i(0+0\mid\xi)=$ $=\lim\pi_i(\tau\mid\xi)$ при $\tau\to0+0$. Обозначим в дальнейшем $\pi_i(0-0\mid\xi)=\tilde{\pi}_i(\xi)$, $\pi_i(0\mid\xi)=\pi_i(\xi)$, $i=1,2$.

Введем в рассмотрение переходные вероятности π_{ij} – вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $\tau=0$ до наступления следующего события в наблюдаемом потоке, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i (момент $\tau=0$) в состояние j (момент наступления следующего события в наблюдаемом потоке), $i,j=1,2$. Тогда для вложенной цепи Маркова (моментов наступления событий в наблюдаемом потоке) справедливы уравнения для финальных вероятностей $\tilde{\pi}_i(\xi)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_1(\xi)&=[\tilde{\pi}_1(\xi)(1-p)+\tilde{\pi}_2(\xi)q]\pi_{11}+[\tilde{\pi}_1(\xi)p+\tilde{\pi}_2(\xi)(1-q)]\pi_{21},\\ \tilde{\pi}_2(\xi)&=[\tilde{\pi}_2(\xi)(1-q)+\tilde{\pi}_1(\xi)p]\pi_{22}+[\tilde{\pi}_2(\xi)q+\tilde{\pi}_1(\xi)(1-p)]\pi_{12},\\ &\tilde{\pi}_1(\xi)+\tilde{\pi}_2(\xi)=1.\end{aligned} \tag{12}$$

Введем в рассмотрение переходные вероятности $q_{ij}(\xi)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности ξ процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i (момент $\tau=0$) в состояние j (момент $\tau=\xi$) ($i,j=1,2$). Выписав систему дифференциальных уравнений для вероятностей $q_{ij}(\xi)$ с граничными условиями $q_{11}(0)=q_{22}(0)=1$, $q_{12}(0)=q_{21}(0)=0$ и решив ее, находим

$$\begin{aligned}q_{11}(\tau)&=\pi_1+\pi_2e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\tau},\ q_{12}(\tau)=\pi_2-\pi_2e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\tau},\\ q_{21}(\tau)&=\pi_1-\pi_1e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\tau},\ q_{22}(\tau)=\pi_2+\pi_1e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\tau},\end{aligned} \tag{13}$$

где π_1, π_2 определены в (5).

Припишем теперь моменту окончания периода ненаблюдаемости $(0,\xi)$ момент $t=0$. Тогда на полуинтервале $[t,t+\Delta t)$, где Δt – достаточно малый интервал времени, с вероятностью $\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)$ либо с вероятностью $\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)$ произойдет событие наблюдаемого потока. Введем в рассмотрение вероятности $p_{ij}(t)$ – вероятность того, что на интервале $(0,t)$ нет событий наблюдаемого потока и в момент времени t имеет место $\lambda(t)=\lambda_j$ при условии, что в момент времени $t=0$ имеет место $\lambda(0)=\lambda_i$ $(i,j=1,2)$. Тогда $p_{ij}(t)\lambda_j\Delta t+o(\Delta t)$ – совместная вероятность наступления события наблюдаемого потока на полуинтервале $[t,t+\Delta t)$ и перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j за время t $(i,\ j=1,2)$. С другой стороны, если $\widetilde{p}_{ij}(t)$ – соответствующая вероятности $p_{ij}(t)$ плотность вероятности, то наступление события на полуинтервале $[t,t+\Delta t)$ и переход процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j происходит с вероятностью $\widetilde{p}_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t)$. Тогда имеем $\widetilde{p}_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t)=p_{ij}(t)\lambda_j\Delta t+o(\Delta t)$, откуда получаем $\widetilde{p}_{ij}(t)=\lambda_j p_{ij}(t)$ $(i,\ j=1,2)$. Так как t – произвольный момент времени, то вероятность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j запишется в виде

$$p_{ij}=\int_0^\infty \widetilde{p}_{ij}(t)dt=\lambda_j\int_0^\infty p_{ij}(t)dt\ \ (i,j=1,2). \tag{14}$$

Вероятности $p_{ij}(t)$ по своему смыслу ничем не отличаются от вероятностей (6), только вместо $\tau-\xi$ в формулах (6) нужно поставить t. Подставляя в (14) выражения (6) с заменой в (6) величины $\tau-\xi$ на t, находим

$$p_{11}=p_{22}=1,\ p_{12}=p_{21}=0. \tag{15}$$

В силу марковости процесса $\lambda(t)$ полученные переходные вероятности (13) и (15) позволяют выписать выражения для переходных вероятностей π_{ij} в виде: $\pi_{ij}=q_{i1}(\xi)p_{1j}+q_{i2}(\xi)p_{2j}$ $(i,j=1,2)$, где $q_{ij}(\xi)$ определены формулами (13), в которых $\tau=\xi$; p_{ij} определены формулами (15). Осуществляя подстановку в эту формулу выражений (13) и (15) (для соответствующих i, j), находим явный вид переходных вероятностей:

$$\begin{aligned}&\pi_{11}=\pi_1+\pi_2 e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\xi},\ \pi_{12}=\pi_2-\pi_2 e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\xi},\\ &\pi_{21}=\pi_1-\pi_1 e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\xi},\ \pi_{22}=\pi_2+\pi_1 e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\xi},\end{aligned} \tag{16}$$

где π_i определены в (5). Наконец, подставляя (16) в (12), получаем явный вид финальных вероятностей $\widetilde{\pi}_i(\xi)$:

$$\widetilde{\pi}_1(\xi)=\frac{\pi_1-(\pi_1-q)e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\xi}}{1-(1-p-q)e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\xi}},\ \widetilde{\pi}_2(\xi)=\frac{\pi_2-(\pi_2-p)e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\xi}}{1-(1-p-q)e^{-(p\lambda_1+q\lambda_2)\xi}}. \tag{17}$$

Положив в (17) $\xi = 0$, получим выражения для вероятностей $\tilde{\pi}_i$ – условная апостериорная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в i-м состоянии при условии, что в момент времени $\tau = 0$ наступили события синхронного потока, выведенные в [6] и отличающиеся от финальных априорных вероятностей π_i $(i = 1, 2)$.

Подставляя (17) в (11), находим:

$$\pi_1(\xi) = \frac{q + (1-p-q)\pi_1\left(1 - e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)\xi}\right)}{1 - (1-p-q)e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)\xi}},$$
$$\pi_2(\xi) = \frac{p + (1-p-q)\pi_2\left(1 - e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)\xi}\right)}{1 - (1-p-q)e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)\xi}}. \quad (18)$$

Соотношения (18) позволяют выразить константы $A_1(\xi)$ и $A_2(\xi)$ из граничных условий (10): $A_1(\xi) = \pi_1$, $A_2(\xi) = \pi_2 - \pi_2(\xi) = -(\pi_1 - \pi_1(\xi))$. Тогда формулы (9) примут вид:

$$\pi_1(\tau \mid \xi) = \pi_1 - [\pi_1 - \pi_1(\xi)]e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)\tau},$$
$$\pi_2(\tau \mid \xi) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(\xi)]e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)\tau}, \quad (19)$$

где π_i определены в (5), $\pi_i(\xi)$ – в (18), $i = 1,2$.

Подставляя (7) и (19) (в (19) нужно взять $\tau = \xi$) в (8), проделывая при этом необходимые преобразования, получаем выражение для $p(\tau - \xi \mid \xi)$ в виде

$$p(\tau - \xi \mid \xi) = \Gamma(\xi)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - \xi)} + [1 - \Gamma(\xi)]\lambda_2 e^{-\lambda_2(\tau - \xi)}, \ \tau \ge \xi,$$
$$\Gamma(\xi) = \frac{q}{p\lambda_1 + q\lambda_2}\left[\lambda_2 - \frac{p(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 - p - q - e^{(p\lambda_1 + q\lambda_2)\xi}}\right]. \quad (20)$$

Преобразование Лапласа плотности $p(\tau)$ запишется в виде

$$g_\tau(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} p(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-s\xi} p(\xi)d\xi \int_0^\infty e^{-\eta s} p(\eta \mid \xi)d\eta,$$

где $\eta = \tau - \xi$. Подставляя сюда выражение (20), в котором $\tau - \xi = \eta$, и производя при этом необходимые преобразования, находим:

$$g_\tau(s) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s}\int_0^\infty e^{-s\xi} p(\xi)d\xi + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s}\right)\int_0^\infty e^{-s\xi}\Gamma(\xi)p(\xi)d\xi. \quad (21)$$

Подставляя в (21) явный вид $\Gamma(\xi)$ из (20), учитывая при этом формулу (3) и проделывая необходимые выкладки, получаем (21) в виде

$$g_\tau(s) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s}\left(1 + \frac{as}{\lambda_1 + s}\right)g_\xi(s) + \frac{bs}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}\int_0^\infty \frac{e^{-s\xi}p(\xi)d\xi}{p + q - 1 + e^{\lambda\xi}}, \quad (22)$$

где $a = \dfrac{q(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda}$, $b = \dfrac{pq(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\lambda}$, $\lambda = p\lambda_1 + q\lambda_2$; $g_\xi(s)$ определена формулой (4).

Подчеркнем, что из (22) следует необходимость рассмотрения трех случаев: 1) $0 < p+q < 1$, 2) $1 < p+q \le 2$, 3) $p+q=1$. В итоге для случаев 1), 2) получаем:

$$g_\tau(s)=\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s}\left(1+\frac{as}{\lambda_1+s}\right)g_\xi(s)+\frac{bs}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p-q)^{k-1}g_\xi(k\lambda+s), \quad (23)$$

для случая 3) имеем:

$$g_\tau(s)=\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s}\left(1+\frac{as}{\lambda_1+s}\right)g_\xi(s)+\frac{bs}{(\lambda_1+s)(\lambda_2+s)}g_\xi(\lambda+s), \quad (24)$$

где $g_\xi(k\lambda+s)$, $k=0,1,2,\ldots$, определена формулой (4), в которой вместо s нужно поставить $k\lambda+s$; a, b, λ определены в (22). Заметим, что бесконечный ряд в (23) является сходящимся как для случая $0<p+q<1$, так и для случая $1<p+q\le 2$, когда он является знакопеременным.

ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНКИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ

Для построения оценки длительности мертвого времени используем метод моментов [7]. Как отмечалось в [1], даже в случае непродлевающегося мертвого времени методом моментов принципиально возможна оценка только четырех параметров из пяти – λ_1, λ_2, p, q, T. В случае продлевающегося мертвого времени ситуация, очевидно, не изменится. Более того, в рассматриваемом случае возникают дополнительные трудности, связанные с тем, что в выражение (23) входит бесконечный ряд.

Явный вид преобразования Лапласа (23), (24) позволяет получить аналитический вид начальных моментов:

$$M\left(\tau^m\right)=\int_0^\infty \tau^m p(\tau)d\tau=(-1)^m\, g_\tau^{(m)}(s)\big|_{s=0},\ m=1,2,\ldots . \quad (25)$$

Вследствие этого для оценки, по крайней мере, четырех неизвестных параметров из пяти λ_1, λ_2, p, q, T (один параметр должен быть априорно задан) можно использовать метод моментов. Как известно [7], этот метод дает оценки, обладающие достаточно хорошими свойствами при больших выборках наблюдений, и является довольно популярным наряду с методом максимального правдоподобия. Последний в рассматриваемом случае продлевающегося мертвого времени применить достаточно затруднительно, так как найти обратное преобразование Лапласа от (24), а тем более от (23), т. е. найти явный вид плотности вероятностей $p(\tau)$ и выписать после этого функцию правдоподобия, представляется неосуществимым.

Рассмотрим статистики $C_m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i^m$, $m=\overline{1,4}$, считая, что наблюдалось $n+1$ событий наблюдаемого потока. В силу одинаковой распределенности величин τ_i имеет место $M(C_m)=M\left(\tau^m\right)$, где M – оператор математического ожидания. Тогда для оценки четырех неизвестных параметров имеем уравнения моментов: $M\left(\tau^m\right)=C_m$, $m=\overline{1,4}$, где $M\left(\tau^m\right)$ определены в (25). Подчеркнем, что если имеется априорная информация о параметрах исходного синхронного потока событий λ_1,

λ_2, p, q, то для оценки длительности мертвого времени T достаточно одного уравнения моментов ($m = 1$).

Предположим, что параметры исходного синхронного потока λ_1, λ_2, p, q являются известными. Тогда для оценки длительности мертвого времени T имеем уравнение моментов $M(\tau) = C_1$, где $M(\tau)$ определено выражением (25) для $m = 1$. Ограничимся в (23) первым слагаемым бесконечного ряда ($k = 1$). Взяв производную от (23) по s в точке $s = 0$, производя необходимые преобразования в уравнении $M(\tau) = C_1$, получаем приближенное уравнение моментов для случаев $0 < p + q < 1$, $1 < p + q \le 2$:

$$\frac{q\lambda_2\left(1-e^{-\lambda_1 T}\right)+p\lambda_1\left(1-e^{-\lambda_2 T}\right)}{\lambda_1\lambda_2\left(qe^{-\lambda_1 T}+pe^{-\lambda_2 T}\right)}-$$

$$-b\frac{qe^{-h_1 T}+pe^{-h_2 T}}{p+q-\frac{q\lambda_1}{h_1}\left(1-e^{-h_1 T}\right)-\frac{p\lambda_2}{h_2}\left(1-e^{-h_2 T}\right)}+c-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i = 0, \tag{26}$$

где b определена в (22), $c = \frac{p\lambda_1^2 + q\lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda}$, $h_1 = \lambda_1 + \lambda$, $h_2 = \lambda_2 + \lambda$, λ определена в (22); $0 < T \le \tau_{\min}$, $\tau_{\min} = \min \tau_i$ ($i = \overline{1,n}$).

Для случая $p + q = 1$ получаем, с учетом (24) и (25), точное уравнение моментов

$$\frac{q\lambda_2\left(1-e^{-\lambda_1 T}\right)+p\lambda_1\left(1-e^{-\lambda_2 T}\right)}{\lambda_1\lambda_2\left(qe^{-\lambda_1 T}+pe^{-\lambda_2 T}\right)}-$$

$$-b\frac{qe^{-h_1 T}+pe^{-h_2 T}}{1-\frac{q\lambda_1}{h_1}\left(1-e^{-h_1 T}\right)-\frac{p\lambda_2}{h_2}\left(1-e^{-h_2 T}\right)}+c-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i = 0, \tag{27}$$

где все величины определены в (26).

Очевидно, что решение уравнений (26), (27) возможно только численно. В качестве оценки $\hat{T}$ длительности мертвого времени T естественно выбирать корни уравнений (26), (27) из полуинтервала $(0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min \tau_i$ ($i = \overline{1,n}$). При этом возможны варианты: 1) если корень, попавший в полуинтервал $(0, \tau_{\min}]$, единственный, то тогда этот корень и есть $\hat{T}$; 2) если ни один из корней не попал в полуинтервал $(0, \tau_{\min}]$, то тогда оценка $\hat{T} = \tau_{\min}$; 3) если в полуинтервал $(0, \tau_{\min}]$ попадает более одного корня, то тогда для того, чтобы сделать оценку $\hat{T}$, необходима некоторая дополнительная информация либо в качестве оценки $\hat{T}$ надо выбирать среднее арифметическое этих корней.

Сделаем еще одно важное замечание. Рассмотрим исходный синхронный поток без мертвого времени ($T = 0$). Пусть τ_1 и τ_2 – два соседних интервала между событиями: $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, их расположение на временной оси, в силу стационарных условий функционирования потока, произвольно. Можно показать, что совместная плотность вероятностей интервалов τ_1 и τ_2 имеет вид:

$$\tilde{p}(\tau_1,\tau_2)=\tilde{p}(\tau_1)\tilde{p}(\tau_2)+$$
$$+(1-p-q)\gamma(1-\gamma)\left(\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau_1}-\lambda_2 e^{-\lambda_2\tau_1}\right)\left(\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau_2}-\lambda_2 e^{-\lambda_2\tau_2}\right), \qquad (28)$$

где $\tilde{p}(\tau_1)$, $\tilde{p}(\tau_2)$, γ определены в (1).

Из (28) следует, что синхронный поток является, с другой стороны, рекуррентным потоком только для случая $p+q=1$, во всех остальных случаях ($0<p+q<1$, $1<p+q\le 2$) синхронный поток является коррелированным потоком. Вследствие этого оценка $\hat{T}$, реализованная путем решения уравнений моментов (26) и (27), только для случая $p+q=1$ будет состоятельной. Для случаев $0<p+q<1$, $1<p+q\le 2$ состоятельность оценки $\hat{T}$ может быть нарушенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А. М., Нежельская Л. А.* Оценивание длительности мертвого времени и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.

2. *Баруча-Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 512 с.

3. *Горцев А. М., Нежельская Л. А.* Оценивание периода мертвого времени и параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий // Измерительная техника. 2003. № 6. С. 7–13.

4. *Васильева Л. А., Горцев А. М.* Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69–79.

5. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963. 236 с.

6. *Горцев А. М., Нежельская Л. А.* Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестн. ТГУ. 2002. № 1 (I). С. 24–29.

7. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.