ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ MAP|GI|∞ В УСЛОВИИ РАСТУЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

А. Е. Горбатенко, А. А. Назаров

Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: anngo86@mail.ru

Для исследования системы MAP|GI|∞ предложен метод асимптотического анализа в условии растущей интенсивности входящего потока и в условии конечной загрузки системы. Приведены результаты численной реализации асимптотического и имитационного распределений числа занятых приборов.

Ключевые слова: система MAP|GI|∞, асимптотический анализ, условие растущей интенсивности.

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает MAP - поток заявок [1], управляемый цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей Q инфинитезимальных характеристик $q_{k\nu}$, набором неотрицательных величины $\lambda_k^{(1)} \geq 0$ и набором вероятностей $d_{k\nu}$ при всех $k \neq \nu$.

Продолжительности обслуживания различных заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют заданную функцию распределения $B(x)$. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание, заявка покидает систему.

Для исследования систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и произвольной функцией распределения времени обслуживания предложен метод просеянного потока [3]. Этот метод заключается в том, что в некоторый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ заявка входящего потока, поступившая в систему, с вероятностью $S(t) = 1 - B(t_1 - t)$ формирует событие просеянного потока.

Обозначим $n(t)$ - число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t.

Допустим, что, если в некоторый начальный момент времени $t_0 < t_1$ система свободна, в ней нет заявок, то для момента времени t_1 выполняется равенство: $i(t_1) = n(t_1)$, где $i(t)$ - число занятых приборов в системе массового обслуживания на момент времени t.

Задача исследования системы сводится к задаче анализа нестационарного просеянного потока $n(t)$ при $t < t_1$ [2].

Двумерный случайный процесс $\{k(t), n(t)\}$ является нестационарной двумерной цепью Маркова[3].

Для распределения вероятностей

$$P(k,n,t) = P\{k(t) = k, n(t) = n\},$$

полагая $d_{kk} = 0$ нетрудно показать, что $P(k, n, t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(k,n,t)}{\partial t} = \sum_{\nu}\{P(\nu,n,t) + S(t)[P(\nu,n-1,t) - P(\nu,n,t)]d_{\nu k}\}q_{\nu k} +$$

$$+S(t)[P(k,n-1,t) - P(k,n,t)]\lambda_k^{(1)}. \qquad (1)$$

Начальное условие для решения $P(k,n,t)$ в момент времени t_0 определим в виде

$$P(k,n,t_0) = \begin{cases} R(k), & n = 0, \\ 0, & n > 0, \end{cases}$$

где $R(k)$ - стационарное распределение.

Обозначим

$$H(k,u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(k,n,t) = R(k) M\{e^{jun(t)} \mid k(t) = k\}, \qquad (2)$$

из (1) получим для этих функций задачу Коши

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H(k,u,t)}{\partial t} = \sum_{\nu} H(\nu,u,t)\{1 + S(t)(e^{ju}-1)d_{\nu k}\}q_{\nu k} + S(t)(e^{ju}-1)H(k,u,t)\lambda_k^{(1)}, \\ &H(k,u,t_0) = R(k), \quad t_0 \le t \le t_1. \end{aligned} \qquad (3)$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Задача исследования системы массового обслуживания сводится к нахождению $P(n) = \sum_k P(k,n,t_1)$, где $P(k,n,t_1)$ –распределение, определяемое функциями $H(k,u,t_1)$.

Поставленную задачу будем решать в асимптотическом условии [3] растущей интенсивности.

Условием растущей интенсивности МАР-потока будем называть соотношения

$$\lambda_k^{(1)} = N \cdot \lambda_k, \ N \to \infty \qquad (4)$$

определяющие большие значения интенсивности потока.

С учетом (4) систему (3) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H(k,u,t,N)}{\partial t} = \sum_{\nu} H(\nu,u,t,N)\{1 + S(t)(e^{ju}-1)d_{\nu k}\}q_{\nu k} + S(t)(e^{ju}-1)H(k,u,t,N)\lambda_k N, \\ &H(k,u,t_0,N) = R(k), \quad t_0 \le t \le t_1. \end{aligned} \qquad (5)$$

Для системы массового обслуживания будем рассматривать условие конечной загрузки:

$$b^{(1)} = b/N, \ N \to \infty \qquad (6)$$

$$\lambda_k^{(1)} \cdot b^{(1)} \le C - const,$$

где $b = \int_0^{\infty} (1 - B(x))dx$ – среднее время обслуживания заявки.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Обозначим $\delta = 1/N$ и в системе (5) выполним следующие замены

$$t = \frac{\tau}{N}, \ H(k,u,t,N) = F(k,u,\tau,\delta), S(t) = S_1(\tau) \qquad (7)$$

получим

$$\frac{\partial F(k,u,\tau,\delta)}{\partial\tau}=\delta\sum_{\nu}F(\nu,u,\tau,\delta)\{1+(e^{ju}-1)d_{\nu k}\}q_{\nu k}+S_1(\tau)(e^{ju}-1)F(k,u,\tau,\delta)\lambda_k,$$
$$F(k,u,\tau_0,\delta)=R(k),\quad \tau_0\le\tau\le\tau_1. \tag{8}$$

В соответствии с теоремой Пуанкаре [4] об аналитической зависимости решения от параметра можно утверждать, что существует

$$\lim_{\delta\to0}F(k,u,\tau,\delta)=F_1(k,u,\tau) \tag{9}$$

В системе (8) выполним предельный переход при $\delta\to0$, для $F_1(k,u,\tau)$ получим следующие равенства

$$\frac{\partial F_1(k,u,\tau)}{\partial t}=S_1(\tau)(e^{ju}-1)F_1(k,u,\tau)\lambda_k,$$
$$F_1(k,u,\tau_0)=R(k),\quad \tau_0\le\tau\le\tau_1. \tag{10}$$

Отметим, что при таком предельном переходе система дифференциальных уравнений задачи Коши (8) обращается в совокупность независимых дифференциальных уравнений задач Коши (10). Из задач Коши (10) функции $F_1(k,u,\tau)$ определяются равенствами:

$$F_1(k,u,\tau)=R(k)\exp\left\{(e^{ju}-1)\lambda_k\int_{\tau_0}^{\tau}S_1(x)dx\right\}. \tag{11}$$

Суммируя (11) по k и выполняя в экспоненте обратную к (7) замену $\tau=tN$, получим

$$\sum_k F_1(k,u,\tau)=\sum_k R(k)\exp\left\{(e^{ju}-1)\lambda_k\int_{t_0}^{t}S(x)dx\right\}=h(u,t), \tag{12}$$

где $h(u,t)$ – асимптотическая при $\delta\to0$ ($N\to\infty$) характеристическая функция $n(t)$ числа событий просеянного потока, наступивших до момента времени t.

Разложив экспоненту в ряд, при $t=t_1=0$ и $t_0\to-\infty$ для характеристической функции $i(t)$ числа занятых приборов в системе получим:

$$h(u)=h(u,0)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}\sum_k R(k)\frac{\rho_k^i}{i!}\cdot e^{-\rho_k}, \tag{13}$$

где $\rho_k=\lambda_k\cdot b$, $b=\int_{-\infty}^{0}S(x)dx=\int_0^{\infty}(1-B(x))dx$.

Для достаточно малых δ (больших N) выполняется приближенное (асимптотическое) равенство:

$$H(k,u,t)=F(k,u,\tau,\delta)\approx F_1(k,u,\tau), \tag{14}$$

С другой стороны, $H(k,u,t)$ определяется равенством (2). Также просуммировав (2) по k, и пологая $t=t_1=0$ и $t_0\to-\infty$, получим

$$H(u)=H(u,0)=\sum_k H(k,u,0)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}\sum_k P(k,i,0)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(i), \tag{15}$$

Просуммировав по k (14), в силу (12), при $t=t_1=0$, получим следующее асимптотическое равенство:

$$H(u)\approx h(u),$$

Из полученного асимптотического равенства, в силу (13) и (15), получим:

$$P(i) \approx P_1(i) = \sum_k R(k) \frac{(\rho_k)^n}{i!} e^{-\rho_k}, \qquad (16)$$

где $P_1(i)$ – асимптотическое распределение числа занятых приборов.

Из (16) следует, что распределение вероятностей $P_1(i)$ является взвешенной суммой с весами $R(k)$ пуассоновских распределений, поэтому рассматриваемое распределение может быть многомодальным [2].

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ К ДОПРЕДЕЛЬНОЙ СИТУАЦИИ

Выше были получены формулы, позволяющие найти асимптотическое распределение числа занятых приборов. Допредельное распределение можно получить с помощью имитационного моделирования[5,6]. Остается выяснить насколько результаты, полученные с помощью асимптотического анализа близки к результатам имитационного моделирования системы массового обслуживания в допредельной ситуации. Для этого рассматривается имитационная модель данной системы и строятся оценки $\hat{P}(i)$ значений вероятностей числа заявок в системе. По оценкам значений вероятностей числа заявок в системе строятся следующие величины: $\hat{F}(i) = \sum_{m=0}^{i} \hat{P}(i), i = 0,1,2,...$ и находится расстояние Колмогорова: $\Delta = \max_i \left| \hat{F}(i) - F(i) \right|$, где $\hat{F}(i)$ – функция распределения, полученная с помощью имитационного моделирования, $F(i)$ – функция распределения, полученная с помощью асимптотического анализа.

Пусть $Q = \begin{Bmatrix} -0.2 & 0.15 & 0.05 \\ 0.1 & -0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & -0.8 \end{Bmatrix}$, $\lambda^{(1)} = N\{2 \quad 7 \quad 18\}$ и $d = \begin{Bmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \end{Bmatrix}$.

Время обслуживания заявок распределено по равномерному закону на интервале $[0, 2b^{(1)}]$, где $b^{(1)} = 2/N$. В этом случае значения величины Δ составили:

N	100	500	1000
Δ	0.0581	0.0435	0.0136

На графике (Рис.1) показаны распределения вероятностей числа занятых приборов (числа заявок в системе), полученных с помощью имитационного моделирования и асимптотического анализа.

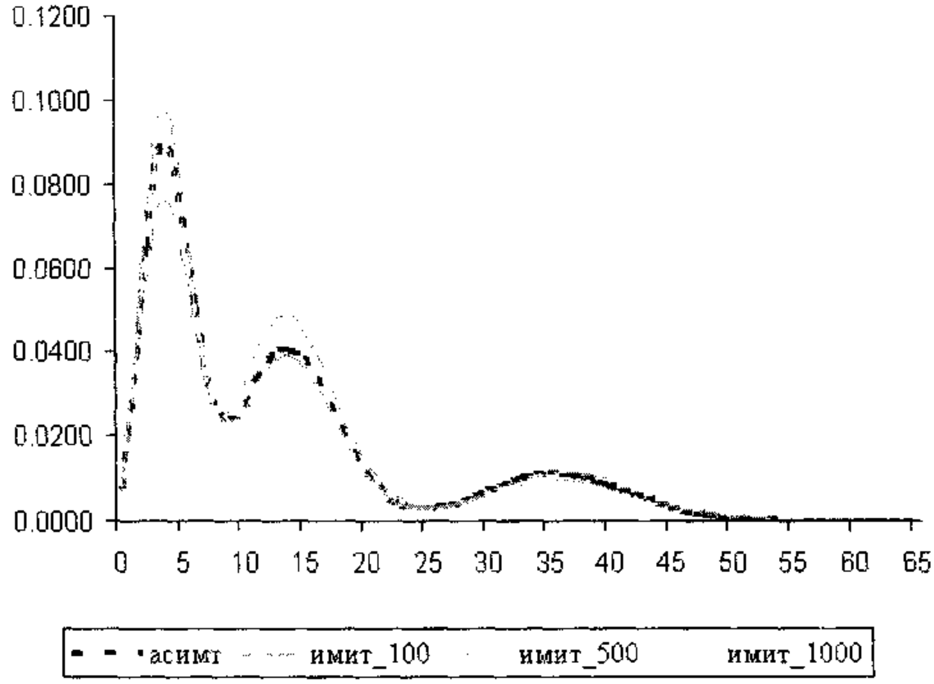

Рис. 1. Распределение вероятностей числа занятых приборов в системе

ВЫВОДЫ

1. Точность асимптотического приближения с возрастанием N увеличивается.
2. Для рассматриваемого случая асимптотическое приближение можно считать приемлемым при $N \geq 1000$, так как в этом случае погрешность $\Delta \leq 0.0136$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко, Б. В* Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. М.: Наука, 2007. –336с.

2. *Назаров, А. А.*. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.– 112с.

3. *Назаров, А. А.*. Теория вероятностей и случайных процессов / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204с.

4. *Эльсгольц, Л. Е.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Е. Эльсгольц. М.: Наука, 1969.- 424с.

5. *Марголис, Н.Ю* Имитационное моделирование случайности / Н. Ю. Марголис, А. Ф. Терпугов. Томск: изд. Том. Гос. Ун-та, 2003. – 63с.

6. *Шеннон, Р.* Имитационное моделирование систем / Р. Шеннон. Искусство и наука. М.: Мир, 1978.