РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ ПРОЦЕССА РИСКА С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Е. В. Гаврина, В. А. Зорин

Нижегородский Государственный Университет им. Н.И.Лобачевского Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
г.Н.Новгород, Россия
E-mail: elena.gavrina@mail.ru

Рассматривается модель деятельности страховой компании, согласно которой капитал компании в момент времени $t > 0$ имеет вид:

$$X(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} y_i \tag{1}$$

Здесь предполагается: x - начальный капитал компании; c – интенсивность поступления премий (величина постоянная); $N(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ ($EN(t) = \lambda t$, $N(0) = 0$), который интерпретируется как число исков, оплаченных страховой компанией за временной промежуток $(0,t]$; $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ - независимая от $N(t)$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(u)$, $F(0)=0$. Последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ описывает размеры выплат страховой компании клиентам (y_i — выплаты по иску с номером i в момент i-го скачка процесса $N(t)$).

Теорема 1. Пусть для процесса риска (1) с указанными выше условиями для c, $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $N(t)$ случайные величины $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ подчиняются гамма-распределению с плотностью распределения $f_{y_i}(v) = \dfrac{a^k v^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-av}, v > 0$, $0 < k < 1$, $a > 0$ и математическое ожидание $EN(t)=t$ для пуассоновского процесса $N(t)$.

Тогда вероятность неразорения $\varphi(x) = P\{X(t) \geq 0$ для всех $t \in R+\}$ представима в виде:

$$e^{ax}\varphi(x) = b_0 + b_1 \frac{x^{1-k}}{\Gamma(2-k)} + b_2 \frac{x}{2} + \int_0^x \Phi(t)dt\ ,\quad x > 0 \tag{2}$$

в котором

$$\Phi(x) = \omega(x) + \int_0^x W(x,t)\Phi(t)dt \tag{3}$$

где

$$W(x,t) = -\frac{\lambda a^k}{c}\frac{(x-t)^k}{\Gamma(1+k)} + \frac{\lambda + ca}{c}, \qquad \omega(x) = -\frac{\lambda a^k}{c}[b_1 + b_2 \frac{x^k}{\Gamma(1+k)}] + \frac{\lambda + ca}{c} b_2 .$$

Доказательство. Далее приведем формальное рассуждение [1], которое приводит к уравнению, определяющему вероятность неразорения $\varphi(x)$. Пусть первый скачок траектории происходит в момент τ и имеет величину u. Чтобы разорение никогда не произошло, необходимо, чтобы $u \le x + c\tau$ и чтобы при всех $t > \tau$ приращения $X(t)$-u не превосходили $x - u + ct$. Поскольку приращения независимы, последнее из этих событий имеет вероятность, равную $\varphi(x\text{-}u\text{+}c\tau)$. Интегрируя по всем возможным значениям t и τ, получаем:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau \int_0^{x+c\tau} \varphi(x + c\tau - u) dF(u) \tag{4}$$

Это и есть уравнение для вероятности неразорения. Однако, его можно упростить: произведем замену s=x+$c\tau$. Тогда имеем:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{c} \int_x^\infty e^{-(\frac{\lambda}{c})(s-x)} ds \int_0^s \varphi(s-u) dF(u) \tag{5}$$

Из (5) следует, что функция $\varphi(x)$ дифференцируема. Дифференцируя (5), получаем окончательное интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi'(x) - \frac{\lambda}{c}\varphi(x) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^x \varphi(x-u) dF(u) \tag{6}$$

С учетом того, что $F(u)$ – функция гамма-распределения, выражение (6) можно записать в виде:

$$c\varphi'(x) - \lambda\varphi(x) = \lambda \frac{a^k}{\Gamma(k)} e^{-ax} \int_0^x \frac{e^{au}}{(x-u)^{1-k}} \varphi(u) du \tag{7}$$

Заметим, что $(e^{ax}\varphi(x))' = e^{ax}\varphi'(x) + ae^{ax}\varphi(x)$. Тогда (7) примет вид:

$$\lambda \frac{a^k}{\Gamma(k)} \int_0^x \frac{e^{au}}{(x-u)^{1-k}} \varphi(u) du = e^{ax}(\lambda + ca)\varphi(x) - c(e^{ax}\varphi(x))' \tag{8}$$

Введем следующую функцию: $\xi(x) = e^{ax}\varphi(x)$ и далее будем рассматривать уравнение (8) с учетом этой замены. Получаем:

$$\lambda \frac{a^k}{\Gamma(k)} \int_0^x \frac{\xi(x)}{(x-u)^{1-k}} du = (\lambda + ca)\xi(x) - c\xi'(x) \tag{9}$$

После дифференцирования по переменной x имеем:

$$\lambda \frac{a^k}{\Gamma(k)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi(x)}{(x-u)^{1-k}} du = (\lambda + ca)\xi'(x) - c\xi''(x) \tag{10}$$

Согласно определению дробной производной, приведенному в работе [2] на стр.43, $\frac{1}{\Gamma(k)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi(x)}{(x-u)^{1-k}} du$ есть производная дробного порядка 1-k, $0 < (1 - k) < 1$ функции $\xi(x)$, т.е. (10) перепишется следующим образом:

$$\lambda a^k (D^m_{0+}\xi)(x) = (\lambda + ca)\xi'(x) - c\xi''(x) \tag{11}$$

где m=1-k. Теперь перепишем уравнение (11) в терминах производной дробного порядка, имеем:

$$(D^2\xi)(x) - \frac{(\lambda + ca)}{c}(D^1\xi)(x) + \frac{\lambda a^k}{c}(D^m\xi)(x) = 0 \qquad (12)$$

Требуется найти решение $\xi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$D^{\sigma_l}\xi(x)\,|_{x=0} = b_l,\ l = 0,\dots,3 \qquad (13)$$

здесь $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, m, 1, 2)$. Таким образом, поставили задачу Коши (12), (13).

Введем следующие обозначения:

$$p_0(x) = -\frac{\lambda + ca}{c},\quad p_1(x) = \frac{\lambda a^k}{c} \qquad (14)$$

Изучение проблемы начнем со случая p_i=0, i=0, 1. В этом случае уравнение (12) перепишется в виде:

$$(D^2\xi)(x) = 0 \qquad (15)$$

Применительно к изучаемой задаче один из результатов работы [2] сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Решение задачи Коши (15), (13) существует, единственно и представимо в виде:

$$\xi(x) = \sum_{l=0}^{2} b_l \frac{x^{\sigma_l}}{\Gamma(1+\sigma_l)}$$

Следуя доказательству теоремы 42.7 из работы [2], проведем доказательство теоремы 2 с учетом специфики рассматриваемой задачи.

Доказательство. Заметим, что

$$(D^{\sigma_l}\xi)(x) = \frac{d^{\alpha_l - 1}}{dx^{\alpha_l - 1}}\frac{d}{dx}(D^{\sigma_{l-1}}\xi)(x) \qquad (16)$$

где $\sigma_l = \sum_{j=0}^{l}\alpha_j - 1$, k=0,…,3, $0 < \alpha_j \le 1$, j=0,…,3. Таким образом, в нашем случае:

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, m, 1-m, 1) \qquad (17)$$

Уравнение (16) можно переписать в форме $\frac{d}{dx}(D^1\xi)(x) = 0$ или

$$(D^1\xi)(x) = b_2 \qquad (18)$$

Таким образом, задача (15), (13) свелась к задаче (18) с условиями (13), где k=0,1. Снова применив к уравнению (18) формулу (16), аналогично предыдущему найдем

$$(D^m\xi)(x) = \frac{d^{-1+m}}{dx^{-1+m}}b_2 + b_1 \qquad (19)$$

Теперь задача (15), (13) свелась к задаче (19) с условиями (13), где k=0. Сделав еще один шаг в этом процессе, получим

$$\xi(x) = D^{-1}b_2 + D^{-m}b_1 + b_0 \qquad (20)$$

которое после учета формулы

$$D^{-\sigma_l}b_l = b_l\frac{x^{\sigma_l}}{\Gamma(1+\sigma_l)} \qquad (21)$$

приобретает вид

$$\xi(x)=\sum_{l=0}^{2} b_l \frac{x^{\sigma_l}}{\Gamma(1+\sigma_l)} \tag{22}$$

Теперь покажем выполнение условий (13). Положив в (22) x=0, получим условие (13) при $l=0$. Подействовав на (22) оператором D^m и положив затем x=0, придем к условию (13) для l=1. Продолжив этот процесс дальше, убедимся в выполнении условий для l=2, 3. Из равенства (22) также следует и единственность решения рассматриваемой задачи типа Коши.

Теорема доказана.

Пользуясь полученными результатами, докажем следующую теорему:

Теорема 3. Пусть $p_k(x)$, k=0,1, заданные соотношениями (14) на $[0,\infty]$ удовлетворяют условию Липшица. Тогда, если $\alpha_0 > 1-\alpha_3$, то задача Коши (12), (13) имеет единственное непрерывное на $[0, \infty]$ решение.

Данная теорема является частным случаем теоремы 42.8, приведенной в работе [2] с доказательством.

В нашем случае фунции $p_k(x)$, k=0,1 есть константы, соответственно, условие Липшица выполняется.

Доказательство. Пусть $D^{\sigma_0}\xi(x)=D^{\sigma_2}\xi(x)=\Phi(x)$. Тогда уравнение (12) примет вид интегрального уравнения Вольтера 2-го рода:

$$\Phi(x)=\omega(x)+\int_0^x W(x,t)\Phi(t)dt \tag{23}$$

где

$$W(x,t)=-\frac{\lambda a^k}{c}\frac{(x-t)^k}{\Gamma(1+k)}+\frac{\lambda+ca}{c},$$

$$\omega(x)=-\frac{\lambda a^k}{c}[b_1+b_2\frac{x^k}{\Gamma(1+k)}]+\frac{\lambda+ca}{c}b_2$$

Применив в (23) метод последовательных приближений, получаем, что уравнение допускает не более одного непрерывного на $[0,a]$ решения $\Phi(x)\in L_1(0,a)$, следовательно по теореме 2 имеем единственность решения.

Доказательство существования решения сводится к доказательству возможности представления

$$\Phi(x)=\frac{d^{\alpha_3-1}}{dx^{\alpha_3-1}}\widetilde{\Phi}(x) \tag{24}$$

Т.к. (23) допускает не более одного решения $\Phi(x)=D^{\sigma_3}\xi(x)$, то по теореме 2 осталось установить, что

$$\xi(x)=\sum_{k=0}^{2} b_k \frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)}+\frac{1}{\Gamma(\sigma_k)}\int_0^x (x-t)^{\sigma_3-1}\Phi(t)dt \tag{25}$$

Таким образом, надо проверить выполнение (24). Но т.к. $\alpha_n=\alpha_3=1$, то осталось проверить, возможность следующего представления: $\Phi(x)=\widetilde{\Phi}(x)$. Очевидно, что $\widetilde{\Phi}(x)\equiv\Phi(x)$ обеспечивает выполнение данного условия.

Теорема доказана.

Для искомой функции имеем следующее представление:

$$e^{ax}\varphi(x) = b_0 + b_1\frac{x^{1-k}}{\Gamma(2-k)} + b_2\frac{x}{2} + \int_0^x \Phi(t)dt,$$

где $\Phi(x)$ имеет вид (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. М: Мир, 1984, т.2.
2. *Самко, С.Г* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас.,О. И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987.