ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРОГО МОМЕНТА ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ, ПОСТРОЕННОЙ ПО НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ИНТЕРВАЛАМ НАБЛЮДЕНИЙ

Ж.В. Василенко[1], А.Ф. Войнов[2], Е.И. Мирская[2]

[1]*Белорусский государственный университет*
г. Минск, Республика Беларусь
E-mail: VasilenkoJV@bsu.by

[2]*Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина*
г. Брест, Республика Беларусь

Статистический анализ временных рядов является одним из наиболее значимых в прикладном и теоретическом отношении направлений математической статистики.

Одной из главных задач спектрального анализа временных рядов является построение и исследование оценок спектральных плотностей стационарных случайных процессов, так как они дают важную информацию о структуре процесса.

К числу периодограммных методов спектрального оценивания, позволяющих получить оценку спектральной плотности непосредственно по исходному набору данных, относят метод Уэлча, в котором осреднение производится по множеству периодограмм, получаемых по пересекающимся и непересекающимся интервалам исходной последовательности данных и вводится окно просмотра данных для уменьшения смещения оценок.

Рассмотрим r-мерный стационарный случайный процесс $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z$, с $MX_a(t)=0$, $a=\overline{1,r}$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$, $a,b=\overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1),\ldots,X_a(T-1)$ $-$ T последовательных наблюдений за составляющей $X_a(t)$, процесса $X(t)$, $t\in Z$, $a=\overline{1,r}$, и $T=LN$, где L $-$ число непересекающихся интервалов разбиения длины N.

Используя метод Уэлча [1] в качестве оценки взаимной спектральной плотности процесса, исследована статистика вида

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_{ab}(\lambda,l), \tag{1}$$

где

$$I_{ab}(\lambda,l)=\frac{1}{2\pi\sum\limits_{p=0}^{N-1}h_a^N(p)h_b^N(p)}H_a(\lambda,l)\overline{H_b(\lambda,l)}, \tag{2}$$

$l=\overline{1,L}$, $a,b=\overline{1,r}$, $\lambda\in\Pi$, модифицированная периодограмма на l-ом интервале разбиения, а $H_a(\lambda,l)$ задано выражением

$$H_a(\lambda,l)=\sum_{t=0}^{N-1}h_a^N(t)X_a(t+(l-1)(N-K))e^{-i\lambda(t+(l-1)(N-K))}, \tag{3}$$

$l=\overline{1,L}$, $a,b=\overline{1,r}$, $\lambda\in\Pi$, причем наблюдения сглаживаются одним и тем же окном просмотра данных $h_a^N(t)$, $t\in Z$.

В работе исследовано асимптотическое поведение второго момента оценки $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$.

Теорема 1. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $a,b=\overline{1,r}$, непрерывна в точках λ_1,λ_2 и ограничена на Π, семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена на Π^3, окна просмотра данных $h_a^N(t)$, $t\in R$, $a=\overline{1,r}$ ограничены единицей и имеют ограниченную вариацию и выполняется соотношение

$$\sup_N \iiint_{\Pi^3}\left|\Phi_{a_1b_1a_2b_2}(y_1,y_2,y_3)\right|dy_1dy_2dy_3\le C_1 , \tag{4}$$

то для оценки $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $a,b=\overline{1,r}$, $\lambda\in\Pi$ заданной выражением (1), имеет место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\operatorname{cov}\left\{\hat{f}_{a_1b_1}^{(T)}(\lambda_1),\hat{f}_{a_2b_2}^{(T)}(\lambda_2)\right\}=$$

$$=\begin{cases}0, & \textit{если}\ \lambda_1\pm\lambda_2\ne 0(\mathrm{mod}\,2\pi),\\ \dfrac{C_3}{L}f_{a_1a_2}(\lambda_1)f_{b_1b_2}(-\lambda_2), & \textit{если}\ \lambda_1-\lambda_2=0(\mathrm{mod}\,2\pi),\lambda_1,\lambda_2\ne 0(\mathrm{mod}\,\pi),\\ \dfrac{C_2}{L}f_{a_1b_2}(\lambda_1)f_{b_1a_2}(\lambda_2), & \textit{если}\ \lambda_1+\lambda_2=0(\mathrm{mod}\,2\pi),\lambda_1,\lambda_2\ne 0(\mathrm{mod}\,\pi),\\ \dfrac{C_3}{L}f_{a_1a_2}(0)f_{b_1b_2}(0)+\dfrac{C_2}{L}f_{a_1b_2}(0)f_{b_1a_2}(0), & \textit{если}\ \lambda_1=\lambda_2=0(\mathrm{mod}\,\pi),\end{cases}$$

где C_1,C_2,C_3 - некоторые постоянные, $a_i,b_i=\overline{1,r}$, $i=\overline{1,2}$, $\lambda_1,\lambda_2\in\Pi$.

Доказательство. По теореме 2 работы [2] ковариация оценки $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, может быть представлена в виде суммы трёх слагаемых A_1, A_2 и A_3. Рассмотрим каждое из слагаемых.

$$|A_1|\le\frac{(2\pi)^3}{L}\frac{\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_1}^N(p)h_{a_2}^N(p)h_{b_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_1}^N(p)\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_2}^N(p)h_{b_2}^N(p)}\iiint_{\Pi^3}\left|\Phi_{a_1b_1a_2b_2}(y_1,y_2,y_3)\right|\times$$
$$\times\left|P_L[(N-K)(y_1+y_2)]\right|\left|f_{a_1b_1a_2b_2}(y_1+\lambda_1,y_2-\lambda_1,y_3-\lambda_2)\right|dy_1dy_2dy_3.$$

Учитывая, что семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена, выполняется соотношение (4) и так как

$$P_L[(N-K)(x+y)]\le\frac{L}{(2\pi)^2} \tag{5}$$

для любых $x,y\in\Pi$ и произвольных целочисленных N, K, можно показать, что

$$\lim_{N\to\infty}A_1=0.$$

Рассмотрим первый случай: $\lambda_1\pm\lambda_2\ne 0$ ($\mathrm{mod}\,2\pi$). Обозначим

$$I=\frac{(2\pi)^2}{L}\frac{\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_2}^N(p)\sum_{p=0}^{N-1}h_{b_1}^N(p)h_{a_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_1}^N(p)\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_2}^N(p)h_{b_2}^N(p)}\iint_{\Pi^2}\Phi_{a_1b_2}(x-\lambda_1,x+\lambda_2)\Phi_{b_1a_2}(y+\lambda_1,y-\lambda_2)\times$$
$$\times P_L\left[(N-K)(x+y)\right]dxdy. \qquad (6)$$

На основании работы [2] $I\xrightarrow[N\to\infty]{}0$.

Рассмотрим выражение

$$\left|A_2-If_{a_1b_2}(\lambda_1)f_{b_1a_2}(\lambda_2)\right|.$$

Сделаем замену переменных интегрирования $z=x-\lambda_1,\beta=y-\lambda_2$, получим

$$\left|A_2-If_{a_1b_2}(\lambda_1)f_{b_1a_2}(\lambda_2)\right|=\left|\frac{(2\pi)^2}{L}\frac{\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_2}^N(p)\sum_{p=0}^{N-1}h_{b_1}^N(p)h_{a_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_1}^N(p)\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_2}^N(p)h_{b_2}^N(p)}\times\right.$$
$$\times\iint_{\Pi^2}\Phi_{a_1b_2}(z,z+\lambda_1+\lambda_2)\Phi_{b_1a_2}(\beta+\lambda_1+\lambda_2,\beta)\;P_L\left[(N-K)(z+\beta+\lambda_1+\lambda_2)\right]\times$$
$$\left.\times\left(f_{a_1b_2}(z+\lambda_1)f_{b_1a_2}(\beta+\lambda_2)-f_{a_1b_2}(\lambda_1)f_{b_1a_2}(\lambda_2)\right)dzd\beta\right|\le$$

$$\le\left|\frac{(2\pi)^2}{L}\frac{\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_2}^N(p)\sum_{p=0}^{N-1}h_{b_1}^N(p)h_{a_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_1}^N(p)\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_2}^N(p)h_{b_2}^N(p)}\iint_{\Pi^2}\Phi_{a_1b_2}(z,z+\lambda_1+\lambda_2)\Phi_{b_1a_2}(\beta+\lambda_1+\lambda_2,\beta)\times\right.$$
$$\times P_L\left[(N-K)(z+\beta+\lambda_1+\lambda_2)\right]\;\Big\{\left(f_{a_1b_2}(z+\lambda_1)-f_{a_1b_2}(\lambda_1)\right)\left(f_{b_1a_2}(\beta+\lambda_2)-f_{b_1a_2}(\lambda_2)\right)+f_{a_1b_2}(\lambda_1)\times$$
$$\left.\times\left(f_{b_1a_2}(\beta+\lambda_2)-f_{b_1a_2}(\lambda_2)\right)+f_{b_1a_2}(\lambda_2)\left(f_{a_1b_2}(z+\lambda_1)-f_{a_1b_2}(\lambda_1)\right)\Big\}dzd\beta\right|\le|I_1|+|I_2|+|I_3|.$$

Рассмотрим каждый из интегралов

$$|I_1|\le\frac{\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_2}^N(p)\sum_{p=0}^{N-1}h_{b_1}^N(p)h_{a_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_1}^N(p)h_{b_1}^N(p)\sum_{p=0}^{N-1}h_{a_2}^N(p)h_{b_2}^N(p)}\times$$
$$\times\int_{\Pi}\left|\Phi_{a_1b_2}(z,z+\lambda_1+\lambda_2)\right|\left|f_{a_1b_2}(z+\lambda_1)-f_{a_1b_2}(\lambda_1)\right|dz\times$$
$$\times\int_{\Pi}\left|\Phi_{b_1a_2}(\beta+\lambda_1+\lambda_2,\beta)\right|\left|f_{b_1a_2}(\beta+\lambda_2)-f_{b_1a_2}(\lambda_2)\right|d\beta.$$

Обозначим

$$I_1'=\int_{\Pi}\left|\Phi_{b_1a_2}(\beta+\lambda_1+\lambda_2,\beta)\right|\left|f_{b_1a_2}(\beta+\lambda_2)-f_{b_1a_2}(\lambda_2)\right|d\beta.$$

Учитывая непрерывность взаимной спектральной плотности $f_{ab}(x)$ в точке $x=\lambda_2$, используя неравенство Гельдера, и так как $f_{ab}(x)$ ограничена на Π, получим

$$I_1'\xrightarrow[N\to\infty]{}0. \qquad (7)$$

Откуда следует, что $|I_1|\xrightarrow[N\to\infty]{}0$.

Рассмотрим $|I_2|$. Используя (5), получим

$$|I_2| \le \frac{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_2}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{b_1}^N(p) h_{a_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_1}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{a_2}^N(p) h_{b_2}^N(p)} \left| f_{a_1 b_2}(\lambda_1) \right| \times$$

$$\times \int_{\Pi} \left| \Phi_{b_1 a_2}(\beta + \lambda_1 + \lambda_2, \beta) \right| \left| f_{b_1 a_2}(\beta + \lambda_2) - f_{b_1 a_2}(\lambda_2) \right| d\beta \int_{\Pi} \left| \Phi_{a_1 b_2}(z, z + \lambda_1 + \lambda_2) \right| dz .$$

Применяя неравенство Гельдера, можно показать, что

$$\int_{\Pi} \left| \Phi_{a_1 b_2}(z, z + \lambda_1 + \lambda_2) \right| dz \le \frac{\left(\sum_{p=0}^{N-1} \left[h_{a_1}^N(p) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p=0}^{N-1} \left[h_{b_2}^N(p) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_2}^N(p)} . \qquad (8)$$

для $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$. Учитывая соотношение (7), $|I_2| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$.

Рассмотрим $|I_3|$.

$$|I_3| = \left| \frac{(2\pi)^2}{L} \frac{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_2}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{b_1}^N(p) h_{a_2}^N(p)}{\sum_{p=0}^{N-1} h_{a_1}^N(p) h_{b_1}^N(p) \sum_{p=0}^{N-1} h_{a_2}^N(p) h_{b_2}^N(p)} \times \right.$$

$$\times \iint_{\Pi^2} \Phi_{a_1 b_2}(z, z + \lambda_1 + \lambda_2) \Phi_{b_1 a_2}(\beta + \lambda_1 + \lambda_2, \beta) \times$$

$$\left. \times P_L \left[(N-K)(z + \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \right] f_{b_1 a_2}(\lambda_2) \left(f_{a_1 b_2}(z + \lambda_1) - f_{a_1 b_2}(\lambda_1) \right) dz d\beta \right| .$$

Аналогично как и для $|I_2|$ можно показать, что $|I_3| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$. Откуда следует, что

$$\left| A_2 - I f_{a_1 b_2}(\lambda_1) f_{b_1 a_2}(\lambda_2) \right| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 .$$

Значит $|A_2| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$. Аналогично можно показать, что $|A_3| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$.

Остальные случаи доказываются аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 для оценки $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, заданной выражением (1), справедливо соотношение

$$\lim_{N \to \infty} D \hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{L} C f_{aa}(\lambda) f_{bb}(\lambda), & \textit{при } \lambda \ne 0 \ (\mathrm{mod}\ \pi), \\ \frac{1}{L} \left(f_{ab}(0) f_{ba}(0) + C f_{aa}(0) f_{bb}(0) \right), & \textit{при } \lambda = 0 \ (\mathrm{mod}\ \pi), \end{cases} \qquad (9)$$

где C - некоторая постоянная, $a, b = \overline{1, r}$, $\lambda \in \Pi$.

Доказательство следует из теоремы 1, полагая $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $b_1 = b_2 = b$, $a_1 = a_2 = a$.

Используя ряд, состоящий из 1160 наблюдений ежедневной температуры грунта в городе Бресте с 01.11.2004 г. по 30.01.2008 г. проведен сравнительный анализ оценки (1) в зависимости от окон просмотра данных и числа интервалов наблюдений. На рис.1-5 представлены графики оценки спектральной плотности (1) для различных окон просмотра данных и числа интервалов разбиения наблюдений.

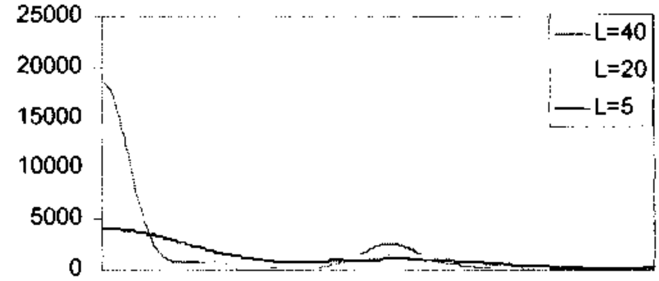

Рис.1. График оценки спектральной плотности (1), построенной по 1160 наблюдениям за температурой грунта в городе Бресте с 01.11.2004 г. по 30.01.2008 г. для числа разбиений L=40, L=20, L=5 для окна Хэмминга.

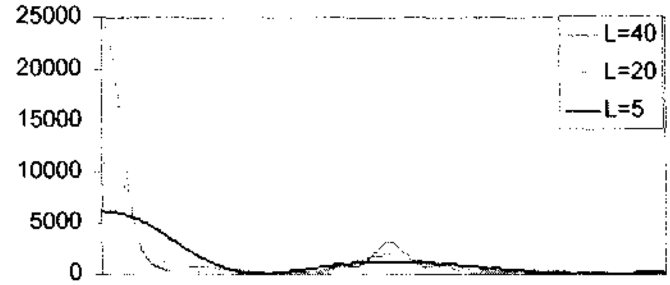

Рис.2. График оценки спектральной плотности (1), построенной по 1160 наблюдениям за температурой грунта в городе Бресте с 01.11.2004 г. по 30.01.2008 г. для числа разбиений L=40, L=20, L=5 для окна Рисса.

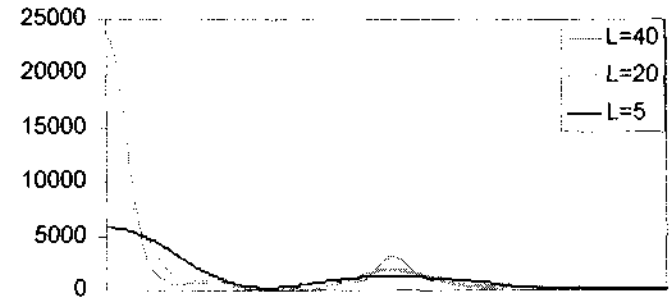

Рис.3. График оценки спектральной плотности (1), построенной по 1160 наблюдениям за температурой грунта в городе Бресте с 01.11.2004 г. по 30.01.2008 г. для числа разбиений L=40, L=20, L=5 для окна Дирихле.

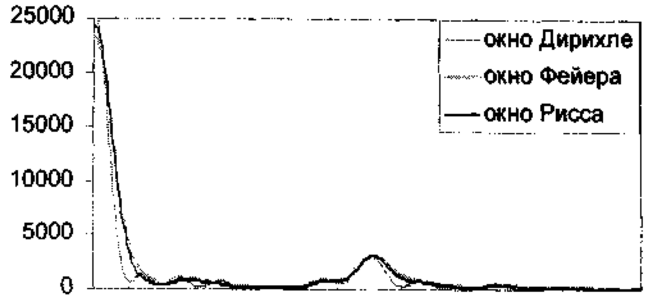

Рис.4. График оценки спектральной плотности (1), построенной по 1160 наблюдениям за температурой грунта в городе Бресте с 01.11.2004 г. по 30.01.2008 г. для числа разбиений L=40 для окон Дирихле, Фейера, Рисса.

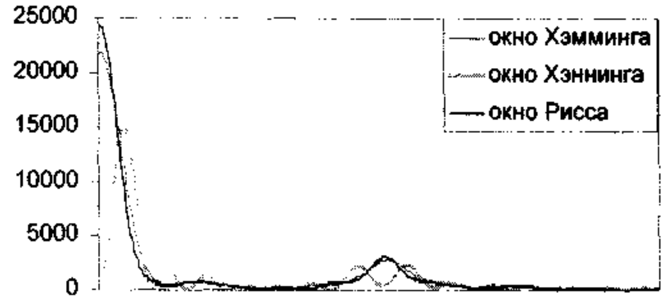

Рис.5. График оценки спектральной плотности (1), построенной по 1160 наблюдениям за температурой грунта в городе Бресте с 01.11.2004 г. по 30.01.2008 г. для числа разбиений L=40 для окон Хэннинга, Хэмминга, Рисса.

Наиболее эффективным является использование окон просмотра данных Хэмминга и Рисса. Показано, что дисперсия оценки (1) уменьшается при увеличении числа интервалов разбиения исходной последовательности наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Welch, P. D.* The use of FFT for the estimation of power spectra / P. D. Welch // IEEE Trans. Electroacoust. 1967. V. 15. № 2. P. 70–73.

2. *Труш, Н.Н., Мирская, Е.И.* Статистические свойства оценок спектральных плотностей по пересекающимся интервалам наблюдений / Н.Н. Труш, Е.И. Мирская // Сб.науч.ст. "Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования". 1991. С.180-185.

3. *Мирская, Е.И., Василенко, Ж.В.* Исследование первых двух моментов сглаженной оценки спектральной плотности. // Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике (MoAPMI-2004): Сборник научных статей международной научной конференции, 20-23 сентября 2004. – Брест, 2004. – С. 170-173.

4. *Mirskaya, E.I., Vasilenko, J.V.* The investigation of the moments of the smoothed spectral densities estimates. // 4 - th International Workshop, CASTR 2007, Siedlce, Poland, January 31 - February 3, 2007 Proceedings. Wydawnictwo Akademii Podlaskiej, Siedlce 2007, P. 224-228.