НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СТЕРЖНЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОГО ВО ВРЕМЕНИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

В. И. Вальковская

Гомельский государственный технический университет им. П.О.Сухого
Гомель, Беларусь
E-mail: Duha6@yandex.ru

При исследовании различных технологических процессов возникает необходимость определения нестационарных температурных полей. Зачастую эти процессы протекают под действием случайных факторов и для своего адекватного описания требуют привлечения аппарата теории вероятностей. Рассмотрим следующую стохастическую краевую задачу.

Пусть к поверхности $y = \frac{h}{2}$ свободно опертого однородного прямоугольного стержня длины l с площадью поперечного сечения s подводится тепловой поток, плотность которого $q = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – случайная функция времени. В рамках несвязной динамической теории термоупругости в предположении теплоизолированности поверхности $y = -\frac{h}{2}$ приходим к задаче построения решения системы уравнений [1]:

$$b_0^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + b_1^2 \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(t, y) \tag{1}$$

$$EJ \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + pS \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

по начально-краевым условиям:

$$T\big|_{t=0} = \frac{\partial T}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=-\frac{h}{2}} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=\frac{h}{2}} = \left(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\alpha}{\lambda_q} \varphi(t) \tag{3}$$

$$\omega\big|_{t=0} = \frac{\partial \omega}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,\ \omega\bigg|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0,\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\bigg|_{\substack{x=0\\x=l}} = -M_T \tag{4}$$

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕННЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ

При непрерывном распределении вдоль стержня тепловых источников, интенсивность которых является случайной функцией времени, задача построения обобщенного нестационарного температурного поля в данном стержне математически формулируется так:

найти в области $D = \left\{(t, y), -\frac{h}{2} \le y \le \frac{h}{2}, 0 \le t \le t_1 < \omega\right\}$

решение уравнения:

$$b_0^2\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+b_1^2\frac{\partial T}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=f(t,y) \tag{5}$$

которое удовлетворяет нулевым начальным условиям и краевым условиям:

$$\begin{aligned}&\left(h_{11}\frac{\partial}{\partial y}+h_{12}\frac{\partial}{\partial t}+h_{13}\right)T\Bigg|_{y=-\frac{h}{2}}=\varphi_1(t)\\&\left(h_{21}\frac{\partial}{\partial y}+h_{22}\frac{\partial}{\partial t}+h_{23}\right)T\Bigg|_{y=\frac{h}{2}}=\varphi_2(t)\end{aligned} \tag{6}$$

где $h_{ik}\,(i=1{,}2;\,k=\overline{1{,}3})$ – относительные коэффициенты теплообмена.

Интегральный оператор Лапласа задаче (5), (6) ставит в соответствие задачу построения на $\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]$ решения обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2T^*}{dy^2}-q^2T^*=-a^2f^*(p,y),\ q^2=\frac{b_0^2p^2+b_1^2p}{a^2} \tag{7}$$

которое удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}&\left(h_{11}\frac{d}{dy}+h_{12}p+h_{13}\right)T^*\Bigg|_{y=-\frac{h}{2}}=\varphi_1^*(p)\\&\left(h_{21}\frac{d}{dy}+h_{22}p+h_{23}\right)T^*\Bigg|_{y=\frac{h}{2}}=\varphi_2^*(p)\end{aligned} \tag{8}$$

Фундаментальная функция задачи (7), (8) определяется по формуле:

$$\varepsilon^*(p,\eta,y)=\frac{1}{\Delta(p)}\begin{cases}\Phi_1\left(p,\frac{h}{2}+y\right)\Phi_2\left(p,\frac{h}{2}-\eta\right), & -\frac{h}{2}\le y<\eta\le\frac{h}{2}\\ \Phi_1\left(p,\frac{h}{2}+\eta\right)\Phi_2\left(p,\frac{h}{2}-y\right), & -\frac{h}{2}\le \eta<y\le\frac{h}{2}\end{cases}$$

а функции Грина:

$$W_{S_j}^{1}(p,z_j)=\frac{\Phi_j(p,z_j)}{\Delta(p)}$$

Здесь:

$$\Delta(p)=\left[-a_1q^2+a_2p^2+a_3p+a_4\right]\operatorname{sh}qh+\left[b_2p+b_3\right]q\operatorname{ch}qh,$$

$$\Phi_j(p,z_j)=(-1)^j h_{j1}q\operatorname{ch}qz_j+(h_{j2}p+h_{j3})\operatorname{sh}qz_j,$$

$$z_j=\frac{h}{2}+S_jy,\ \ S_j=(-1)^{j+1},\ \ j=1{,}2.$$

Тогда единственным детерминированным решением задачи (5), (6) является функция:

$$T^*(p,y)=W_{-1}^*(p,y)\varphi_1^*(p)+W_{+1}^*(p,y)\varphi_2^*(p)+$$

$$+\frac{1}{a^2}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varepsilon^*(p,y,\eta)f^*(\eta,p)d\eta \qquad (9)$$

Возвращаясь к оригиналу получаем корреляционную функцию $K_T(t_1,t_2,y)$ обобщенного температурного поля в рассматриваемом стержне.

В частности, если поверхность $y=-\frac{h}{2}$ теплоизолирована, а поверхность $y=\frac{h}{2}$ поддерживается под воздействием случайного во времени теплового потока, получаем:

а) на поверхности $y=\frac{h}{2}$ действует случайный процесс типа $\delta(t_1-t_2)$, в этом случае:

$$K_T(t_1,t_2,y)=\int\limits_0^t W_0(t_1-\tau,y)W_0(t_2-\tau,y)d\tau \qquad (10)$$

б) на поверхности $y=\frac{h}{2}$ действует случайный процесс типа $e^{-\chi|t_1-t_2|}$, в этом случае:

$$K_T(t_1,t_2,y)=\Phi_0(t_1,y)\Phi_0(t_2,y)+2\chi\int\limits_0^t \Phi_0(t_1-\tau,y)\Phi_0(t_2-\tau,y)d\tau \qquad (11)$$

Здесь:

$$W_0(t,y)=\frac{4\alpha}{h\lambda_q}e^{-kt}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\varepsilon_n\left[(1-k\tau_r)\frac{\operatorname{sh}q_n t}{q_n}+\frac{\tau_r}{2b_0^2}\operatorname{ch}q_n t\right]\cos\frac{\pi n}{h}\left(\frac{h}{2}+y\right),$$

$$\Phi_0(t,y)=\int\limits_0^t W_0(t-s,y)e^{-\chi s}ds, \quad q_n=\sqrt{b_1^4-4b_0^2\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2}.$$

Полагая в формулах (10), (11) $t_1=t_2=t$ получаем мощности $D_T(t,y)$ обобщенных нестационарных температурных полей в рассматриваемом стержне.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

Методом конечного интегрального синус-преобразования Фурье легко строится детерминированное решение задачи (2), (4):

$$\omega=\frac{4c^2}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\int\limits_0^t \operatorname{sh}\beta_m^2(t-s)M_T(s)ds\frac{\sin\beta_m\frac{x}{c}}{m}, \quad \beta_m=\frac{c\pi}{e}m, \quad c^4=\frac{EJ}{\rho S};$$

Поскольку температурный момент

$$M_T(s)=\frac{12\alpha_T E}{h^3}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}T(t,y)ydy=\frac{12\alpha_T E}{h^3}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}ydy\int\limits_0^S W_0(s-\tau,y)\varphi(\tau)d\tau\equiv$$

$$\equiv\frac{96E\alpha_T\alpha}{\pi^2h^2\lambda_q}\int\limits_0^S\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{h^2}\left[(1-\tau_r\cdot h)\frac{\operatorname{sh}q_n(s-\tau)}{q_n}+\frac{\tau_r}{2b_0^2}\operatorname{ch}q_n(s-\tau)\right]\cdot e^{-h(s-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\equiv$$

$$\equiv \frac{96\alpha_T E\alpha}{\pi^2 h^2 \lambda_q}\int_0^s H_0(s-\tau)\varphi(\tau)d\tau ,$$

то

$$\omega = A\int_0^t \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\sin\beta_m \frac{x}{c}}{mn^2} H_{n,m}(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \equiv A\int_0^t H(t-\tau,x)\varphi(\tau)d\tau$$

$$H_{n,m}(t-\tau) = \int_0^{t-\tau}\left[(1-k\tau_r)\frac{\operatorname{sh} q_n s}{q_n} + \frac{\tau_r}{2b_0^2}\operatorname{ch} q_n s\right]e^{-ks}\operatorname{sh}\beta_m(t-\tau,s)ds ,$$

$$A = \frac{384c^4 E\alpha_T\alpha}{\pi^3 h^2\lambda_q};$$

В силу наложенных на функцию $\varphi(t)$ ограничений, имеем:

$$M[\omega(t,x)] = 0$$

$$K_\omega(t_1,t_2,x) = A^2\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} H(t_1-\tau_1,x)H(t_2-\tau_2,x)K_\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \qquad (12)$$

Если $\varphi(t)$ – «белый шум», то

$$K_\omega(t_1,t_2,x) = A^2\int_0^t H(t_1-\tau_1,x)H(t_2-\tau_2,x)d\tau , \quad t=\min(t_1,t_2) \qquad (13)$$

а если $K\varphi(t_1,t_2) = e^{-\chi|t_1-t_2|}$, то

$$K_\omega(t_1,t_2,x) = B(t_1,x)B(t_2,x) + 2\chi\int_0^t B(t_1-\tau,x)B(t_2-\tau,x)d\tau \qquad (14)$$

где

$$B(t,x) = A\int_0^t H(t-\eta,x)e^{-\chi\eta}d\eta , \quad t=\min(t_1,t_2) .$$

Полагая в формулах (13), (14) $t_1 = t_2 = t$, получаем соответственно мощность поля прогибов, образованного в стержне в результате действия на поверхность $y = \frac{h}{2}$ случайного во времени теплового потока.

Построенные вероятностные характеристики стохастических нестационарных температурных полей с точки зрения корреляционной теории являются достаточными для инженерных расчетов [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.И.* Учет эффектов связности в задаче о тепловом ударе на поверхности стержня / В.М. Козлов // Журн. Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1991. № 11. с.97-100.
2. *Паркус Г.М.* Неустановившиеся термоупругие напряжения / Г.М. Паркус. М.: Мир, 1970. 256 с.