МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ НА ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЕЙ

В. А. Вавилов, А. А. Назаров

Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске
Россия, г. Анжеро-Судженск
E-mail: vavilov@asf.ru
Томский государственный университет
Россия, г. Томск
E-mail: anazarov@fpmk.tsu.ru

В работе представлена математическая модель локальной сети, управляемой протоколом случайного множественного доступа, с учётом влияния случайных внешних воздействий на процесс передачи данных. Найдены асимптотические средние характеристики, величины отклонений от этих средних. Исследована важнейшая из вероятностно-временных характеристик – плотность распределения вероятностей значений процесса изменения числа требований в системе.

Ключевые слова: протокол случайного множественного доступа, локальная компьютерная сеть, однолинейная система массового обслуживания, источник повторных вызовов, случайная среда, цепь Маркова, система дифференциальных уравнений Колмогорова, метод асимптотического анализа марковизируемых систем.

Случайные неконтролируемые внешние воздействия оказывают значительное влияние на производительность вычислительных сетей. Исследования такого рода влияния позволяют выработать определенные механизмы защиты и повысить эффективность функционирования сетей связи.

В работах [1-4] нами исследованы вероятностно-временные характеристики локальных сетей с учетом влияния случайной среды на канал связи, а в работах [5-8] исследованы аналогичные характеристики сетей с учетом влияния среды на источник повторных вызовов (ИПВ). Однако, зачастую влияние случайной среды сказывается и на продолжительности передачи сообщений по каналу связи, и на интенсивности обращения пакетов из ИПВ, и на характеристиках входящего потока сообщений.

В данной работе в качестве математической модели случайной среды рассмотрим однородную цепь Маркова $s(t)$ с конечным множеством состояний $s = 1,2,...,S$ и непрерывным временем, для которой заданы ее инфинитезимальные характеристики $q_{s_1 s_2}$. Очевидно, что $\sum_{s_2=1}^{S} q_{s_1 s_2} = 0$, $s_1 = 1,2,...,S$.

Рассмотрим математическую модель сети множественного доступа с оповещением о конфликте в виде однолинейной системы массового обслуживания (СМО), на вход которой поступает марковский модулированный пуассоновский поток, определяемый набором условных интенсивностей $\lambda(s)$, где s – состояние случайной среды.

Прибор этой СМО может находиться в одном из трех состояний: $k=0$, если он свободен; $k=1$, если он занят обслуживанием заявки; $k=2$, если на приборе реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Продолжительность обслуживания заявки на приборе при условии, что случайная среда находится в состоянии s, имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu(s)$. Вероятность окончания успешного обслуживания заявки на приборе за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $\mu(s)\Delta t + o(\Delta t)$. Если в течение обслуживания этой заявки другие требования на прибор не поступают, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то возникает конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте.

Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о конфликте, переходят в ИПВ. Влияние случайной среды на ИПВ определяется зависимостью интенсивности γ обращения заявок из ИПВ от состояний s случайной среды, то есть $\gamma=\gamma(s)$. Вероятность обращения заявок на прибор из ИПВ за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $\gamma(s)\Delta t + o(\Delta t)$. Число заявок в ИПВ обозначим i.

Длины интервалов оповещения о конфликте также имеют экспоненциальное распределение с параметром $1/a$, где a – средняя продолжительность этих интервалов.

В силу свойств приведенной математической модели, трехмерный случайный процесс $\{k(t), i(t), s(t)\}$ изменения во времени состояний $\{k(t), i(t)\}$ математической модели сети связи и состояний $\{s(t)\}$ математической модели случайной среды, является цепью Маркова с непрерывным временем.

Обозначим $P(k(t)=k, i(t)=i, s(t)=s) = P_k(i,s,t)$. В любой момент времени должно выполняться условие нормировки $\sum\limits_{k=0}^{2}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{s=1}^{S} P_k(i,s,t) = 1$.

Представим интенсивность обращения заявок на прибор из ИПВ в виде $\gamma(s)=\gamma\sigma(s)$. Можно показать, что распределение $P_k(i,s,t)$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\frac{\partial P_0(i,s,t)}{\partial t} + \big(\lambda(s)+i\gamma\sigma(s)\big)P_0(i,s,t) = \mu(s)P_1(i,s,t) + \frac{1}{a}P_2(i,s,t) + \sum_{s_1=1}^{S} P_0(i,s_1,t)q_{s_1 s},$$

$$\frac{\partial P_1(i,s,t)}{\partial t} + \big(\lambda(s)+i\gamma\sigma(s)+\mu(s)\big)P_1(i,s,t) = \lambda(s)P_0(i,s,t) +$$

$$+(i+1)\gamma\sigma(s)P_0(i+1,s,t) + \sum_{s_1=1}^{S} P_1(i,s_1,t)q_{s_1 s},$$

$$\frac{\partial P_2(i,s,t)}{\partial t} + \left(\lambda(s)+\frac{1}{a}\right)P_2(i,s,t) = \lambda(s)P_2(i-1,s,t) +$$

$$+\lambda(s)P_1(i-2,s,t) + (i-1)\gamma\sigma(s)P_1(i-1,s,t) + \sum_{s_1=1}^{S} P_2(i,s_1,t)q_{s_1 s}. \qquad (1)$$

Решение $P_k(i,s,t)$ системы (1) достаточно полно определяет функционирование математической модели сети связи и ее вероятностно-временные характеристики, но для нее не существует точных аналитических методов решения, поэтому данную систему будем исследовать модифицированным для нестационарных распределений методом асимптотического анализа [9-10] в условиях большой задержки $\gamma \to 0$.

Обозначим $\gamma = \varepsilon^2$, $\varepsilon^2 t = \tau$ и рассмотрим предельный процесс $x(\tau) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)\right)$, имеющий смысл асимптотического среднего нормированного числа заявок в ИПВ.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Асимптотически при $\gamma \to 0$ распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний k канала имеет вид

$$R_0(x) = \frac{\Lambda_1(x) + x\psi_1(x) + \varphi(x)}{G(x)}, \qquad R_1(x) = \frac{\Lambda_0(x) + x\psi_0(x)}{G(x)},$$

$$R_2(x) = \frac{a(\Lambda_0(x) + x\psi_0(x))(\Lambda_1(x) + x\psi_1(x))}{G(x)}, \tag{2}$$

где $G(x)$ определяется равенством

$$G(x) = a(\Lambda_0(x) + x\psi_0(x))(\Lambda_1(x) + x\psi_1(x)) + x(\psi_0(x) + \psi_1(x)) + (\Lambda_0(x) + \Lambda_1(x)) + \varphi(x),$$

в котором a задано, $x = x(\tau)$ – детерминированная функция, определяемая обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$x'(\tau) = -x\psi_0(x)R_0(x) + \Lambda_2(x)R_2(x) + (2\Lambda_1(x) + x\psi_1(x))R_1(x), \tag{3}$$

здесь величины $\varphi(x)$, $\psi_k(x)$, $\Lambda_k(x)$ определяются следующими равенствами

$$\sum_{s=1}^{S}\mu(s)Q_1(x,s) = \varphi(x)\,R_1(x), \qquad \sum_{s=1}^{S}\sigma(s)Q_k(x,s) = \psi_k(x)R_k(x),\ k = 0,1,$$

$$\sum_{s=1}^{S}\lambda(s)Q_k(x,s) = \Lambda_k(x)R_k(x),\ k = 0,1,2, \tag{4}$$

$Q_k(x,s)$ определяются решением системы

$$(\lambda(s) + \sigma(s)x)Q_0(x,s) = \mu(s)Q_1(x,s) + \frac{1}{a}Q_2(x,s) + \sum_{s_1=1}^{S}Q_0(x,s_1)q_{s_1 s},$$

$$(\lambda(s) + \sigma(s)x + \mu(s))Q_1(x,s) = (\lambda(s) + \sigma(s)x)Q_0(x,s) + \sum_{s_1=1}^{S}Q_1(x,s_1)q_{s_1 s},$$

$$\frac{1}{a}Q_2(x,s) = (\lambda(s) + \sigma(s)x)Q_1(x,s) + \sum_{s_1=1}^{S}Q_2(x,s_1)q_{s_1 s}$$

и условием нормировки $\sum\limits_{k=0}^{2}\sum\limits_{s=1}^{S}Q_k(x,s) = 1$.

Далее рассмотрим процесс $y(\tau) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\left(\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) - x(\tau)\right)/\varepsilon\right)$, который характеризует изменение величин отклонения нормированного числа заявок в ИПВ от их асимптотического среднего и покажем, что он является диффузионным процессом авторегрессии.

Для упрощения дальнейших выкладок обозначим правую часть дифференциального уравнения (3) как $A(x)$, то есть $x'(\tau) = A(x)$, тогда

$$A(x) = -x\psi_0(x)R_0(x) + \Lambda_2(x)R_2(x) + (2\Lambda_1(x) + x\psi_1(x))R_1(x). \tag{5}$$

Теорема 2. Асимптотически при $\gamma \to 0$ случайный процесс $y(\tau)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$dy(\tau)=A'_x(x)y(\tau)d\tau+B(x)dw(\tau), \tag{6}$$

где $w(\tau)$ есть стандартный винеровский процесс, функция $A(x)$ определяется обозначением (5), функция $B(x)$ определяется равенством

$$B^2(x)=x\psi_0(x)R_0(x)+\Lambda_2(x)R_2(x)+(4\Lambda_1(x)+x\psi_1(x))R_1(x)+$$
$$+2\Bigl(x\eta_0(x)h_0^{(1)}(x)-\theta_2(x)h_2^{(1)}(x)-(2\theta_1(x)+x\eta_1(x))h_1^{(1)}(x)+$$
$$+\bigl(-x\psi_0(x)R_0(x)+\Lambda_2(x)R_2(x)+(2\Lambda_1(x)+x\psi_1(x))R_1(x)\bigr)\cdot\sum_{k=0}^{2}h_k^{(1)}(x)\Bigr), \tag{7}$$

здесь параметр a задан, $R_k(x)$ есть распределения (2), величины $\varphi(x)$, $\psi_k(x)$, $\Lambda_k(x)$ определяются равенствами (4), $h_k^{(1)}(x)=\sum_{s=1}^{S}h_k^{(1)}(x,s)$, $k=0,1,2$, в свою очередь $h_k^{(1)}(x,s)$ – есть решение системы

$$-(\lambda(s)+\sigma(s)x)h_0^{(1)}(x,s)+\mu(s))h_1^{(1)}(x,s)+\frac{1}{a}h_2^{(1)}(x,s)+$$
$$+\sum_{s_1=1}^{S}h_0^{(1)}(x,s_1)q_{s_1s}=-x'(\tau)Q_0(x,s),$$
$$-(\lambda(s)+\sigma(s)x+\mu(s))h_1^{(1)}(x,s)+(\lambda(s)+\sigma(s)x)h_0^{(1)}(x,s)+$$
$$+\sum_{s_1=1}^{S}h_1^{(1)}(x,s_1)q_{s_1s}=-x'(\tau)Q_1(x,s)-\sigma(s)xQ_0(x,s),$$
$$-\frac{1}{a}h_2^{(1)}(x,s)+(\lambda(s)+\sigma(s)x)h_1^{(1)}(x,s)+\sum_{s_1=1}^{S}h_2^{(1)}(x,s_1)q_{s_1s}=$$
$$=(\lambda(s)-x'(\tau))Q_2(x,s)+(2\lambda(s)+\sigma(s)x)Q_1(x,s),$$

величины $\eta_k(x)$, $k=0,1$, и $\theta_k(x)$, $k=1,2$ определяются, соответственно, следующими равенствами

$$\eta_k(x)=\sum_{s=1}^{S}\sigma(s)h_k^{(1)}(x,s)\Big/\sum_{s=1}^{S}h_k^{(1)}(x,s), \qquad \theta_k(x)=\sum_{s=1}^{S}\lambda(s)h_k^{(1)}(x,s)\Big/\sum_{s=1}^{S}h_k^{(1)}(x,s).$$

Используя предельные процессы $x(\tau)$ и $y(\tau)$ для достаточно малых значений параметра ε, рассмотрим процесс $z(\tau)=x(\tau)+\varepsilon y$, который аппроксимирует процесс изменения числа заявок в ИПВ $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$, и покажем, что он является однородным диффузионным процессом. Можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. С точностью до $o(\varepsilon)$ случайный процесс $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dz(\tau)=A(z)d\tau+\varepsilon B(z)dw(\tau),$$

где $w(\tau)$ есть стандартный винеровский процесс, функция $A(z)$ определяется обозначением (5), а функция $B(z)$ – равенством (7), то есть $z(\tau)$ является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $A(z)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2B^2(z)$.

Следствие 3.1. Плотность распределения вероятностей значений процесса $z(\tau)$

имеет вид

$$F(z)=\frac{1}{B^2(z)}\exp\left(\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z\frac{A(u)}{B^2(u)}du\right)\Bigg/\int_0^\infty\frac{1}{B^2(z)}\exp\left(\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z\frac{A(u)}{B^2(u)}du\right)dz. \qquad (8)$$

Итак, в данной работе найдено распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний k канала в виде (2). Получено дифференциальное уравнение (3), определяющее асимптотическое среднее $x(\tau)$ нормированного числа заявок в ИПВ. Исследованы величины отклонения от этого среднего, показано, что процесс их изменения $y(\tau)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида (6). Доказано, что для достаточно малых значений параметра ε случайный процесс $z(\tau)=x(\tau)+\varepsilon y$, аппроксимирующий процесс изменения числа заявок в ИПВ $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$, является однородным диффузионным процессом. Найдена важнейшая из вероятностно-временных характеристик этого процесса – плотность распределения вероятностей $F(z)$ в виде (8). Полученные результаты могут быть использованы при проектировании сетей связи, управляемых протоколами случайного множественного доступа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вавилов, В. А.* Исследование средних характеристик неустойчивых сетей множественного доступа в случайной среде / В. А. Вавилов, А. А. Назаров // Обработка данных и управление в сложных системах: Сборник статей. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 14-24.

2. *Вавилов, В. А.* Исследование математических моделей многостабильных сетей множественного доступа в случайной среде / В. А. Вавилов, А. А. Назаров // Обработка данных и управление в сложных системах: Сборник статей. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 17-30.

3. *Вавилов, В. А.* Исследование асимптотических средних характеристик устойчивых сетей множественного доступа, функционирующих в диффузионной среде / В. А. Вавилов, А. А. Назаров // Вестник ТГУ: Приложение №16. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. С. 73-81.

4. *Вавилов, В. А.* Исследование математических моделей неустойчивых сетей множественного доступа, функционирующих в полумарковской среде / В. А. Вавилов, А. А. Назаров // Вестник ТГУ. Приложение №16. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. С. 61-72.

5. *Вавилов, В. А.* Асимптотический анализ математических моделей устойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в диффузионной среде / В. А. Вавилов, А. А. Назаров // Вестник ТГУ. Приложение №19. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 124-131.

6. *Вавилов, В. А.* Исследование математических моделей устойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в случайной среде / В. А. Вавилов // Вестник ТГУ. Приложение №19. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 131-137.

7. *Вавилов, В. А.* Исследование математических моделей неустойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в диффузионной среде / В. А. Вавилов // Научное творчество молодежи: Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции (20-21 апреля 2007 г.) Ч.1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – С. 3-6.

8. *Вавилов, В. А.* Плотность распределения вероятностей стабильного функционирования устойчивых сетей множественного доступа с работающим в случайной среде источником повторных вызовов / В. А. Вавилов // Научное творчество молодежи: Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции (20-21 апреля 2007 г.) Ч.1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. С. 6-10.

9. *Назаров, А. А.* Асимптотический анализ марковизуемых систем. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 159 с.

10. *Назаров, А. А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева // – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.