

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ПРОЦЕССОВ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Г. А. Медведев, Е. Г. Красногир

Белорусский государственный университет

г. Минск, Беларусь

MedvedevGA@bsu.by

Предлагается в качестве аппроксимации плотности вероятностей двумерного процесса процентной ставки принять функцию, определенную как смесь плотностей гамма и нормальной. Свойства такой аппроксимации анализируются численно для семейства параметров, имеющих реальные значения.

Ключевые слова: процентная ставка, двухфакторная модель, уравнения Колмогорова, двумерные плотности.

Рассмотрим двухфакторную модель безрисковой процентной ставки $R(t)$, которую представим в виде пары стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}dR(t) &= k_1(L(t) - R(t))dt + \sigma_1 \sqrt{R(t) - x} dW_1(t), \\dL(t) &= k_2(\Theta - L(t))dt + \sigma_2 \sqrt{R(t) - x} dW_2(t).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $R(t)$ – процесс безрисковой процентной ставки; $L(t)$ – процесс ее локального (по времени) математического ожидания; Θ , k_1 , k_2 , σ_1 , σ_2 – постоянные параметры модели; x – нижняя отражающая (недостижимая) граница процесса $R(t)$; $W_1(t)$ и $W_2(t)$ – стандартные независимые между собой винеровские процессы. Заметим, что поскольку процесс $L(t)$ является процессом локального (по времени) математического ожидания, его изменения во времени более медленные, чем у процесса $R(t)$, поэтому для коэффициентов k_1 и k_2 можно ожидать выполнение неравенства $k_1 > k_2$.

Для упрощения аналитических выкладок удобнее уравнения (1) записать в несколько ином виде. Вместо процессов $R(t)$ и $L(t)$ введем их смещенные эквиваленты соотношениями: $r(t) = R(t) - x$, $l(t) = L(t) - x$. Тогда уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned}dr(t) &= k_1(l(t) - r(t))dt + \sigma_1 \sqrt{r(t)} dW_1(t), \\dl(t) &= k_2(\theta - l(t))dt + \sigma_2 \sqrt{r(t)} dW_2(t),\end{aligned}\quad (2)$$

где $\theta = \Theta - x$. Будем считать, что условия недостижимости нижней границы процессом $R(t)$ выполняются, тогда процесс $r(t)$ является процессом с положительными значениями. При некоторых дополнительных условиях на величину σ_2 процесс $l(t)$ будет также процессом с положительными значениями.

В этом случае стационарные представления процессов $r(t)$ и $l(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}R(T) &= \theta + \sigma_1 \int_0^{\infty} e^{-k_1 u} \sqrt{r(t-u)} dw_1(t-u) + \\ &+ \frac{\sigma_2 k_1}{k_1 - k_2} \int_0^{\infty} (e^{-k_2 u} - e^{-k_1 u}) \sqrt{r(t-u)} dw_2(t-u),\end{aligned}$$

$$l(t) = \theta + \sigma_2 \int_0^t e^{-k_2 u} \sqrt{r(t-u)} dw_2(t-u).$$

Поэтому безусловные математические ожидания, дисперсии и ковариации процессов имеют вид

$$E[r(t)] = E[l(t)] = \theta; \quad (3)$$

$$D_r \equiv D[r(t)] = \frac{\sigma_1^2 \theta}{2k_1} + \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{\sigma_2^2 \theta}{2k_2}, \quad D_l \equiv D[l(t)] = \frac{\sigma_2^2 \theta}{2k_2}; \quad (4)$$

$$\text{Cov}[r(t), r(t + \tau)] = \frac{\sigma_1^2 \theta}{2k_1} e^{-k_1 |\tau|} + D_l \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{k_1 e^{-k_2 |\tau|} - k_2 e^{-k_1 |\tau|}}{k_1 - k_2};$$

$$\text{Cov}[l(t), l(t + \tau)] = \frac{\sigma_2^2 \theta}{2k_2} e^{-k_2 |\tau|} = D_l e^{-k_2 |\tau|};$$

$$\text{Cov}[r(t), l(t + \tau)] = D_l \frac{k_1}{k_1 + k_2} e^{-k_2 \tau}, \quad \tau \geq 0,$$

$$\text{Cov}[r(t + \tau), l(t)] = D_l \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{(k_1 + k_2)e^{-k_2 \tau} - 2k_2 e^{-k_1 \tau}}{k_1 - k_2}, \quad \tau \geq 0.$$

Уместно заметить, что в однофакторной модели краткосрочной процентной ставки условие недостижимости отражающей границы имеет вид $D_r < \theta^2$. Можно ожидать, что это условие будет иметь место и в рассматриваемом случае. Кроме того, из формул (4) следует, что для того чтобы имело место неравенство $D_r > D_l$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство $(\sigma_2^2 / \sigma_1^2) < [1 + (k_2 / k_1)]$. Поэтому $D_r > D_l$ для всяких $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$.

При описании модели предпочтительнее пользоваться такими параметрами, которые имеют реальный эконометрический смысл. Реально предполагать, что процентная ставка $R(t)$ может наблюдаться или, в крайнем случае, оцениваться по другим наблюдениям. Процесс $L(t)$ ненаблюдаемый, но в качестве его оценки можно брать тренд процесса $R(t)$. После получения траектории процессов $R(t)$ и $L(t)$ достаточной продолжительности можно построить состоятельные оценки их стационарных математических ожиданий и дисперсий. Поэтому желательно, чтобы описание модели (1) содержало эти параметры. Это можно сделать, используя полученные выше соотношения (4), выразив через стационарные дисперсии волатильности уравнений (1).

$$\sigma_1 \sqrt{R(t) - x} = \sqrt{2k_1 \left(D_r - D_l \frac{k_1}{k_1 + k_2} \right) \frac{R(t) - x}{\Theta - x}},$$

$$\sigma_2 \sqrt{R(t) - x} = \sqrt{2k_2 D_l \frac{R(t) - x}{\Theta - x}}. \quad (5)$$

Для определения плотностей вероятностей случайных процессов диффузионного типа, к которым относятся процессы $r(t)$ и $l(t)$, определяемые уравнениями (2), можно использовать уравнения Колмогорова.

Для многомерного диффузионного процесса $x(t) \in R^m$ (для определенности m -вектора-столбца) описываемого стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = \mu(t, x)dt + \sigma(t, x)dW(t), \quad t > v, \quad x(v) = x_0,$$

дрейф $\mu(t, x)$ – m -вектор-столбец, волатильность $\sigma(t, x)$ – $m \times m$ -матрица, $W(t)$ – m -вектор-столбец независимых стандартных винеровских процессов. В этом случае уравнение Колмогорова для стационарной плотности можно написать в виде

$$0 = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} [\mu_i(x)p] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij}(x)p].$$

К сожалению, уравнения Колмогорова в аналитическом виде решаются крайне редко, поэтому представляет интерес поиск достаточно хороших аппроксимаций их решений.

Перейдем теперь к анализу двумерного процесса $x = (r, l)$, описываемого уравнениями (2). Для него функции дрейфа и волатильности имеют вид

$$\mu(t, x) = \begin{pmatrix} -k_1 & k_1 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \theta \end{pmatrix}, \quad \sigma(t, x) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{r} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{r} \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнение для стационарной плотности вероятностей $p(r, l)$ процесса (2) приобретает вид

$$0 = k_1 \frac{\partial}{\partial r} [(r-l)p] + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rp] + k_2 \frac{\partial}{\partial l} [(l-\theta)p] + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} [rp]. \quad (6)$$

В работе [1] приводятся рассуждения на основе которых можно в качестве приближенного решения уравнения (6) принять следующую функцию

$$p(r, l) = C \frac{\alpha^{\alpha l} r^{\alpha l - 3/2}}{\Gamma(\alpha l)} \exp\left(-\alpha r - \frac{(l-\theta)^2}{2\beta r}\right), \quad (7)$$

где C – постоянная нормировки. Однако интеграл от функции (7) ни по одной из двух переменных в аналитическом виде не вычисляется и существование интеграла по обеим переменным не очевидно. Для наглядности, перейдем к безразмерным переменным: $u = \alpha r$, $v = \alpha l$, $m = \alpha \theta$, $n = \alpha \beta$. Тогда функция (7) примет вид

$$p(u, v) = C' \frac{u^{v-3/2}}{\Gamma(v)} \exp\left(-u - \frac{(v-m)^2}{2nu}\right). \quad (8)$$

Заметим, что это выражение определено только для положительных значений переменных u и v , так как функция гамма определена только для положительных значений аргумента v , а область определения переменной u задается распределением (56). Поскольку свойства функции (7) аналитически исследовать не удастся и возможность ее нормировки неясна, использование ее в качестве совместной плотности процессов (2) является проблематичным и требует предварительного численного анализа. Настоящая статья является попыткой провести такой анализ.

Ниже приводятся результаты вычисления функций (8) для значений параметров, получающихся в реальных ситуациях. Пусть $k_2 = \delta k_1$, $\sigma_2 = \delta \sigma_1$, $0 < \delta < 1$. $D_r \equiv D$. Тогда переменные, встречающиеся в (8) можно представить следующим образом

$$u = \frac{1+2\delta}{1+\delta} \times \frac{(\Theta-x)(R-x)}{D}, \quad v = \frac{1+2\delta}{1+\delta} \times \frac{(\Theta-x)(L-x)}{D}, \quad m = \frac{1+2\delta}{1+\delta} \times \frac{(\Theta-x)^2}{D}, \quad n = \delta.$$

В качестве значений параметров k_1 , Θ и D выберем их оценки из статей известных авторов. Эти оценки приводятся в табл. 1. Величины x и δ будем считать свободными параметрами из интервалов $x \in (-\infty, \Theta)$, $\delta \in (0, 1/2)$.

На рис. 1–12 приведены графики функций $p(R, L)$ для параметров из табл. 1 для значений $x = -0,05$ и $\delta = 0,1$. На каждом рисунке дана ссылка на статью, из которой были взяты параметры для численных расчетов. Как видно из представленных графиков, в рассматриваемых случаях аппроксимации плотностей вероятностей имеют приемлемый характер. В табл. 2 представлены числовые характеристики процессов R и L , полученные на основе этих аппроксимаций двумерных плотностей. Сравнение данных табл. 2 с данными табл. 1 показывает достаточно хорошее совпадение числовых характеристик, что может служить основанием для использования предложенных аппроксимаций при исследовании двухфакторных моделей на практике.

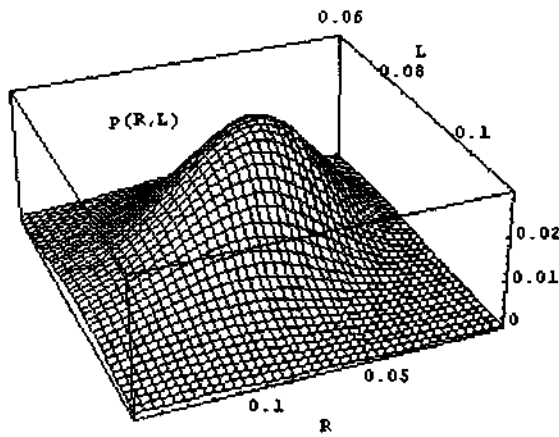


Рис. 1. Аппроксимация плотности для модели CKLS (1992)

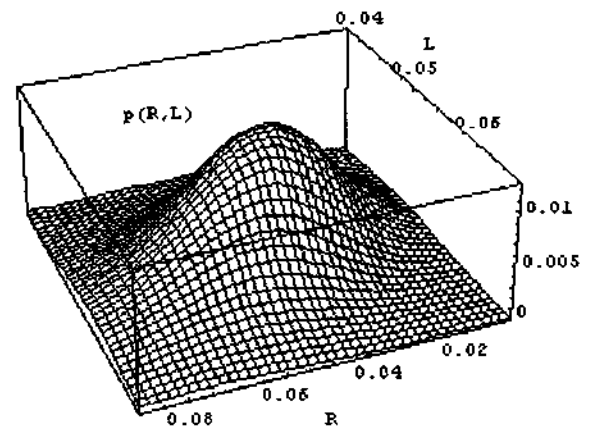


Рис. 2. Аппроксимация плотности для модели Sun (1992)

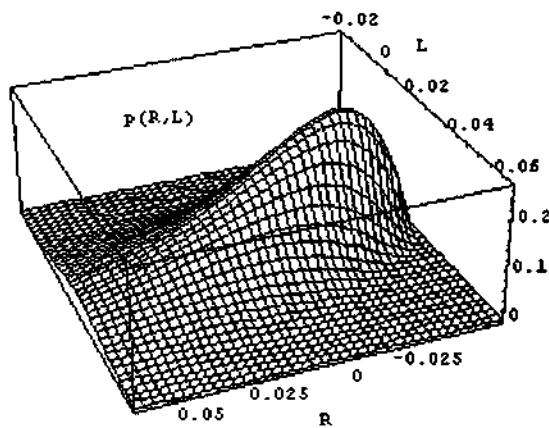


Рис. 3. Аппроксимация плотности для модели Gibbons – Ramaswamy (1993), I

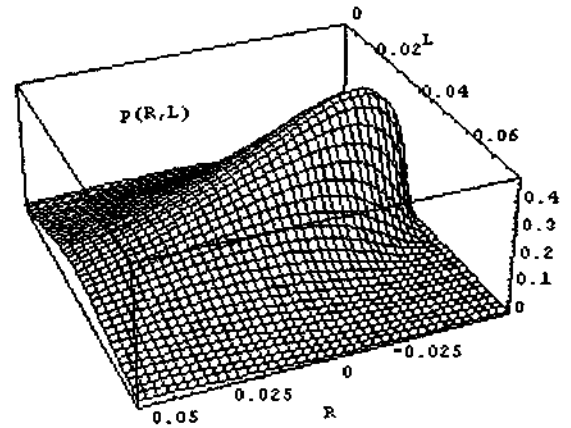


Рис. 4. Аппроксимация плотности для модели Gibbons – Ramaswamy (1993), II

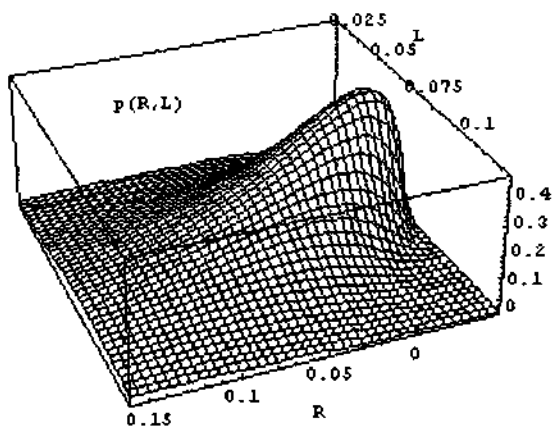


Рис. 5. Аппроксимация плотности для модели Chen & Scott (1993)

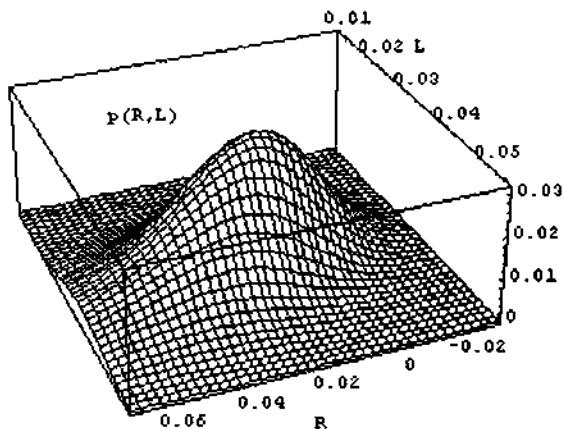


Рис. 6. Аппроксимация плотности для модели Pearson & Sun (1994)

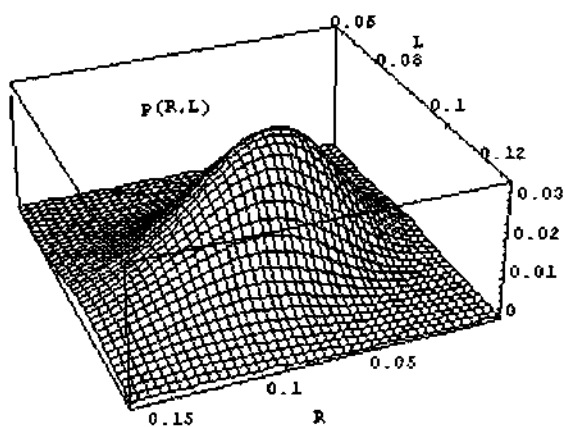


Рис. 7. Аппроксимация плотности для модели Ait-Sahalia (1996)

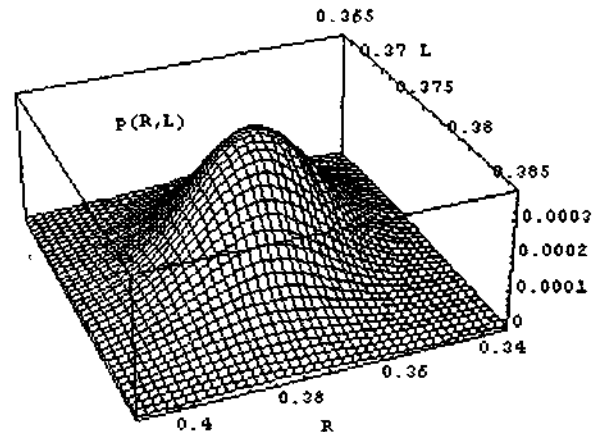


Рис. 8. Аппроксимация плотности для модели Duffie & Singleton (1997), I

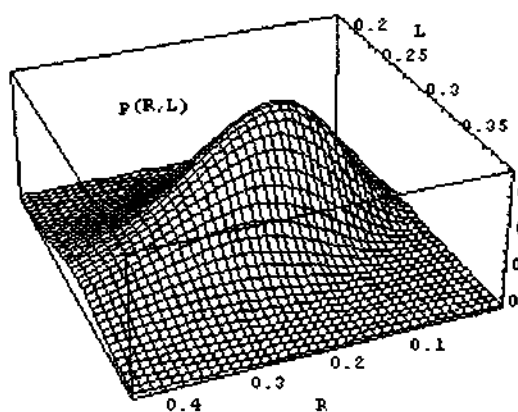


Рис. 9. Аппроксимация плотности для модели Duffie & Singleton (1997), II

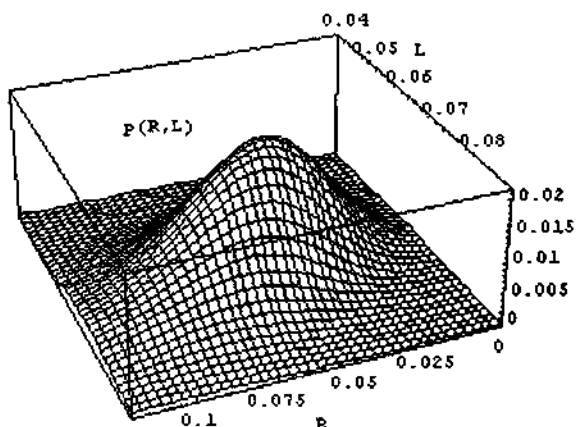


Рис. 10. Аппроксимация плотности для модели Bali (1999)

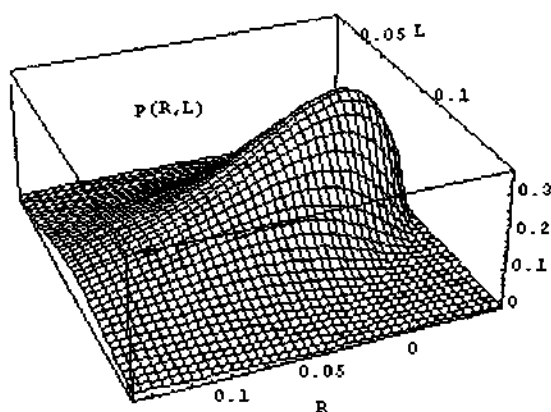


Рис. 11. Аппроксимация плотности для модели Ait-Sahalia (1999)

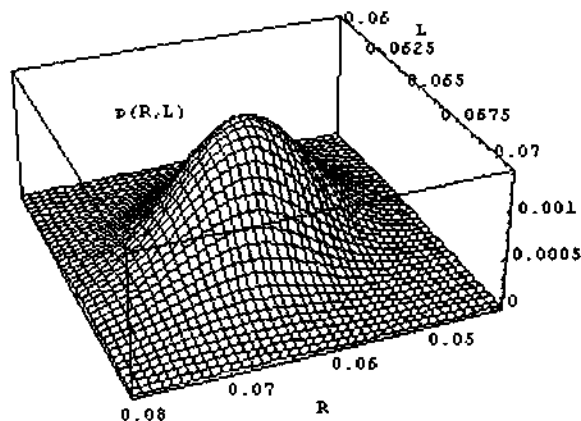


Рис. 12. Аппроксимация плотности для модели Ilieva (2001)

Таблица 1

Литературный источник	k_1	Θ	D
CKLS (1992)	0,2339	0,0808	0,001261
Sun (1992)	1,1570	0,0520	0,000336
Gibbons & Ramaswamy (1993), I	1,0358	0,0154	0,001785
Gibbons & Ramaswamy (1993), II	1,2040	0,0264	0,003267
Chen & Scott (1993)	0,4000	0,0600	0,006750
Pearson & Sun (1994)	0,8762	0,0311	0,000517
Ait-Sahalia (1996)	0,8922	0,0905	0,001661
Duffie & Singleton (1997), I	0,5440	0,3740	0,000182
Duffie & Singleton (1997), II	0,0030	0,2580	0,015523
Bali (1999)	0,0317	0,0642	0,000709
Ait-Sahalia (1999)	0,0219	0,0721	0,007323
Ilieva (2001)	0,1674	0,0638	0,000049

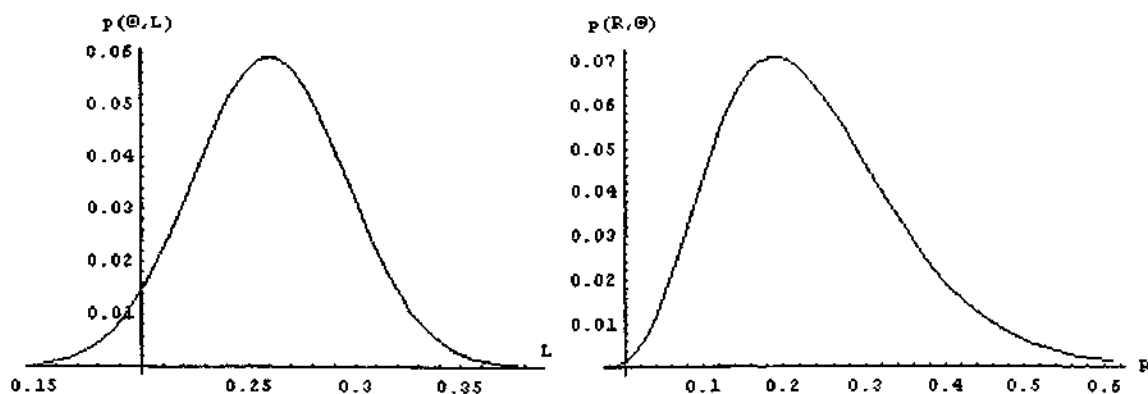


Рис. 13. Сечения двумерной плотности вероятностей при $R = \Theta$ (слева) и $L = \Theta$ (справа) для аппроксимации плотности в случае модели Duffie & Singleton (1997) II

Таблица 2

Модель	m	C	$E[R]$	$E[L]$	$D[R]$	$D[L]$
CKLS (1992)	14,8009	16153,7	0,081684	0,081684	0,001297	0,000117
Sun (1992)	33,7792	138359	0,052302	0,052302	0,000342	0,000031
G & R, I	2,614	2015,42	0,017902	0,017902	0,002000	0,000176
G & R, II	1,94906	821,06	0,03032	0,030320	0,003786	0,000330
C & S (1993)	1,95556	398,719	0,065621	0,065624	0,007815	0,000682
P & S (1994)	13,8784	36944,3	0,031684	0,031684	0,000532	0,000048
A-Sahalia (96)	12,965	10742,4	0,091583	0,091584	0,001712	0,000155
D & S, I	1077,58	8148473	0,374039	0,374039	0,000184	$8,74 \times 10^{-6}$
D & S, II	6,66675	591,129	0,262535	0,262608	0,016268	0,001464
Bali (1999)	20,0666	38951,7	0,064769	0,064769	0,000725	0,000066
A-Sahalia (99)	2,22091	417,39	0,077593	0,077597	0,008347	0,000732
Ilieva (2001)	288,321	$8,65 \times 10^{99}$	0,286758	0,081259	$3,08 \times 10^{-33}$	$3,01 \times 10^{-36}$

На рис. 13 приведены сечения двумерной плотности вероятностей $p(R, L)$ для $R = \Theta$ (слева) и $L = \Theta$ (справа), иллюстрирующие, что распределение для локального среднего близко к нормальному, а распределение для процентной ставки напоминает гамма распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведев Г. А., Казанцева О. Г. Аппроксимация плотности вероятностей процесса процентной ставки в двухфакторной модели // Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике (МоАРМИ—2004): Сб. науч. ст. междунар. конф. Мн., 2004.
2. Ait-Sahalia Y. Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities // *Econometrica*. 1994. Vol. 64. P. 527–560.
3. Ait-Sahalia Y. Transition densities for interest rate and nonlinear diffusions // *Journ. of Finance*. 1999. Vol. 54. P. 1361–1395.
4. Bali T. G. An Empirical Comparison of Continuous Time Models of the Short Term Interest Rate // *Journ. of Futures Markets*. 1999. Vol. 19. P. 777–797.
5. Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F. A., Sanders A. S. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate // *Journ. of Finance*. 1992. Vol. 47. P. 1209–1227.
6. Chen R.-R., Scott L. Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rate // *Journ. of Fixed Income*. 1993. Vol. 3. P. 14–31.
7. Duffie D., Singleton K. J. An Econometric Model of the Term Structure of Interest-Rate Swap Yields // *Journ. of Finance*. 1997. Vol. 52. P. 1287–1321.
8. Gibbons M. R., Ramaswamy K. A Test of the Cox, Ingersoll, and Ross Model of the Term Structure // *Review of Financial Studies*. 1993. Vol. 6. P. 619–658.
9. Ilieva N. G. Use of Mathematical Models of the Interest Rate Processes for the Analysis of Yield Time Series // *Proc. of the 6-th Intern. Conf. «Computer Data Analysis and Modeling»*. Minsk, 2001. P. 157–164.
10. Pearson N. D., Sun T.-S. Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model // *Journ. of Finance*. 1994. Vol. 49. P. 1279–1304.
11. Sun T.-S. Real and Nominal Interest Rates: A Discrete-Time Model and Its Continuous-Time Limit // *Review of Financial Studies*. 1992. Vol. 5. P. 581–611.