ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПРОПУСКАМИ

Ю. С. Харин, А. С. Гурин

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
Kharin@bsu.by, Hurynaliaksandr@yahoo.com

В статье рассматривается проблема статистического прогнозирования векторных авторегрессионных временных рядов при наличии пропущенных значений. Найден и исследован среднеквадратический риск прогнозирования и коэффициент неустойчивости риска. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: прогнозирование, авторегрессия, пропущенные значения, риск.

ВВЕДЕНИЕ

Пропуски являются типичными искажениями модельных предположений в анализе данных [9, 15]. Их появление может быть обусловлено различными причинами [2, 14]: 1) данные не регистрируются с необходимой частотой; 2) ошибки регистрации; 3) удаление выбросов.

Авторегрессионная модель (AR или VAR) часто используется на практике для статистического анализа временных рядов. Можно выделить пять основных задач в статистическом анализе авторегрессионных временных рядов при наличии пропусков: P1) вычисление функции правдоподобия; P2) построение оптимального (в некотором смысле) прогноза; P3) интерполирование пропущенных значений; P4) построение статистических оценок модельных параметров; P5) вычисление риска (среднеквадратической ошибки прогнозирования).

Работа [6] посвящена построению статистических оценок модельных параметров и исследованию их свойств. В [5] предложены некоторые методы прогнозирования авторегрессионных временных рядов с пропусками.

Настоящая статья главным образом посвящена аналитическому решению задачи P5. Проводится вычисление риска МП-прогнозирования для векторных авторегрессионных временных рядов при различных уровнях априорной информации о модельных параметрах (известных точно, неизвестных и оцениваемых по выборке), вычисление приращения риска, которое связано с наличием пропущенных значений, анализ устойчивости риска для различных шаблонов пропусков и различных уровнях априорной информации.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть наблюдаемый векторный временной ряд описывается VAR(1) моделью:

$$Y_t = BY_{t-1} + U_t,\ t \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

где $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел, $Y_t = (y_{t1},...,y_{tp})' \in \mathbf{R}^p$, B – ($p \times p$)-матрица коэффициентов, $U_t = (u_{t1},...,u_{tp})' \in \mathbf{R}^p$, $\{U_t\}$ – н. о. р. нормальные случайные векторы, $E\{U_t\} = 0_p$ – нулевой p-вектор, $E\{U_t U_t'\} = \Sigma$, $|\Sigma| \neq 0$, все собственные числа матрицы B лежат в единичном круге. В наблюдениях $\{Y_t\}$ имеются пропуски. Для каждого вектора Y_t задан бинарный вектор (шаблон) $O_t = (o_{t1},...,o_{tp})' \in \mathbf{R}^p$, где $o_{ti} = \{1$, если y_{ti} наблюдается; 0, если y_{ti} – пропуск$\}$. Заметим, что AR(p) и VAR(p) модели могут быть приведены к VAR(1) увеличением числа компонент [1].

Определим конечное множество $M = \{(t,i), t \in \mathbf{Z}, i \in \{1,...,p\} : o_{ti} = 1\}$ лексикографически упорядоченных пар индексов наблюдаемых данных; $K = |M|$ – общее число наблюдаемых компонент; $t_- = \min\left\{t : \sum_{i=1}^{p} o_{ti} > 0\right\}$ – минимальный момент времени с наблюдаемыми компонентами, $t_+ = \max\left\{t : \sum_{i=1}^{p} o_{ti} > 0\right\}$ – максимальный момент времени с наблюдаемыми компонентами. Определим биекцию $M \leftrightarrow \{1,...,K\} : k = \chi(t,i)$ и обратную функцию $(t,i) = \overline{\chi}(k)$. Составим K-вектор всех наблюдаемых компонент: $X = (x_1,...,x_K)' \in \mathbf{R}^K$, $x_k = y_{\overline{\chi}(k)}$, $k = 1,..,K$. Заметим, что если $o_{ti} = 1$, $t_- \le t \le t_+$, $1 \le i \le p$, тогда процесс Y_t наблюдается на $[t_-, t_+]$ без пропусков, и $K = (t_+ - t_- + 1)p$, $X = (Y'_{t_-}, Y'_{t_-+1},...,Y'_{t_+})'$, $\chi(t,i) = i + (t - t_-)p$; $\overline{\chi}(k) = ([(k-0.5)/p] + t_-, (k-1) \bmod p + 1)$, $k = 1,..,K$.

Также будем рассматривать AR(p) модель как специальный случай (1):

$$y_t = \beta' Y_{t-1} + \xi_t, \; t \in \mathbf{Z}, \tag{2}$$

где $Y_t = (y_t,...,y_{t-p+1})' \in \mathbf{R}^p$, $\beta \in \mathbf{R}^p$ – p-вектор коэффициентов, $\{\xi_t\}$ – н. о. р. нормальные случайные величины, $E\{\xi_t\} = 0$, $E\{\xi_t^2\} = \sigma^2$, шаблон $O_t = \{1$, если y_t наблюдается; 0, если y_t – пропуск$\}$; $M = \{t, t \in \mathbf{Z} : O_t = 1\}$, $K = |M| = \sum_{t \in Z} O_t$, $k = \chi(t) = \sum_{i \le t} O_i$.

Пусть $Y_{t_+ + \tau} \in \mathbf{R}^p$ – будущее значение процесса, которое подлежит прогнозированию для $\tau \ge 1$, $\hat{Y}_{t_+ + \tau} = \hat{Y}_{t_+ + \tau}(X) : \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}^p$ – статистика прогнозирования. Качество прогнозирования будем характеризовать ($p \times p$)-матрицей рисков R и риском прогнозирования r:

$$R = E\left\{\left(\hat{Y}_{t_+ + \tau} - Y_{t_+ + \tau}\right)\left(\hat{Y}_{t_+ + \tau} - Y_{t_+ + \tau}\right)'\right\}, \; r = \mathrm{tr}(R) \ge 0. \tag{3}$$

Известно [2], что в случае полных данных и известных параметров B, Σ минимальный риск $r_0^* = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=0}^{\tau-1} B^i \Sigma (B')^i\right) > 0$ достигается для прогноза $\tilde{Y}_{t_+ + \tau} = B^{\tau} Y_{t_+}$. Для того чтобы исследовать поведение риска, введем коэффициент неустойчивости риска [3]:

$$\kappa = \left(r - r_0^*\right)/ r_0^* \geq 0, \tag{4}$$

который является относительным приращением риска r, связанным с наличием пропущенных значений, к минимальному риску r_0^*.

МП-ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОПУСКОВ И ИЗВЕСТНЫХ B, Σ

Введем матричные обозначения:

$$F = \mathrm{cov}(X, X),\ G = \mathrm{cov}\left(X, Y_{t_+ + \tau}\right),\ H = \mathrm{cov}\left(Y_{t_+ + \tau}, Y_{t_+ + \tau}\right),$$

$$A_0 = A_0(B, \Sigma) = G' F^{-1},\ \tilde{\Sigma} = \sum_{i=0}^{\infty} B^i \Sigma (B')^i .$$

Л е м м а. Имеют место следующие выражения для F, G, H:

$$\mathrm{F}_{ij} = F_{ji} = \left(B^{\bar{\chi}_1(i) - \bar{\chi}_1(j)} \tilde{\Sigma}\right)_{\bar{\chi}_2(i), \bar{\chi}_2(j)},\ i, j = 1, \ldots, K,\ i \geq j; \tag{5}$$

$$G_{ij} = \left(B^{(t_+ + \tau) - \bar{\chi}_1(i)} \tilde{\Sigma}\right)_{j, \bar{\chi}_2(i)},\ i = 1, \ldots, K,\ j = 1, \ldots, p;\ H = \tilde{\Sigma}.$$

Доказательство. Используя выражение ковариационной матрицы для VAR(1) модели [1]: $\mathrm{cov}\left(Y_i, Y_j\right) = B^{i-j} \tilde{\Sigma}$, $i \geq j$, находим:

$$F_{ij} = \mathrm{cov}\{x_i, x_j\} = \mathrm{cov}\{y_{\bar{\chi}(i)}, y_{\bar{\chi}(j)}\} =$$

$$= \left(\mathrm{cov}\{Y_{\bar{\chi}_1(i)}, Y_{\bar{\chi}_1(j)}\}\right)_{\bar{\chi}_2(i), \bar{\chi}_2(j)} = \left(B^{\bar{\chi}_1(i) - \bar{\chi}_1(j)} \tilde{\Sigma}\right)_{\bar{\chi}_2(i), \bar{\chi}_2(j)}.$$

Подобным образом находим H и G.

Теорема 1. Пусть параметры B, Σ известны и $|F| \neq 0$, тогда МП-прогноз и его риск равны

$$\hat{Y}_{t_+ + \tau} = E\left\{Y_{t_+ + \tau} \mid X\right\} = A_0 X, \tag{6}$$

$$R_0 = H - G' F^{-1} G \geq 0,\ r_0 = \mathrm{tr}(H) - \mathrm{tr}\left(F^{-1} G G'\right). \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим $Y_+ = \left(X', Y'_{t_+ + \tau}\right)' \in \mathbf{R}^{K+p}$. Из модельных предположений (1) видно, что Y_+ имеет нормальное распределение. По теореме Андерсона [1] функция правдоподобия (как плотность вектора Y_+) имеет вид:

$$l\left(Y_{t_+ + \tau}; B, \Sigma\right) = n_K\left(X \mid 0_K, F\right) n_p\left(Y_{t_+ + \tau} \mid G' F^{-1} X, H - G' F^{-1} G\right), \tag{8}$$

где $n_K(X \mid \mu, \Sigma)$ – K-мерная нормальная плотность распределения с параметрами μ, Σ. МП-прогноз есть решение экстремальной задачи: $l(Y_{t_+ + \tau}; B, \Sigma) \to \max\limits_{Y_{t_+ + \tau}}$. Так как первый множитель в (8) не зависит от $Y_{t_+ + \tau}$, приходим к единственному решению (6): $\hat{Y}_{t_+ + \tau} = G' F^{-1} X = A_0 X$. Используя формулу полного математического ожидания и выражение (6), находим риск (7): $R_0 = E\left\{\left(\hat{Y}_{t_+ + \tau} - Y_{t_+ + \tau}\right)\left(\hat{Y}_{t_+ + \tau} - Y_{t_+ + \tau}\right)'\right\} =$
$E\{E\{(E\{Y_{t_+ + \tau} \mid X\} - Y_{t_+ + \tau})^* \quad (E\{Y_{t_+ + \tau} \mid X\} - Y_{t_+ + \tau})' \mid X\}\} = \quad E\{\mathrm{cov}\{Y_{t_+ + \tau}, Y_{t_+ + \tau} \mid X\}\} =$
$E\{H - G' F^{-1} G\} = H - G' F^{-1} G$.

Следствие 1. Коэффициент неустойчивости риска для МП-прогноза (6) имеет вид:

$$\kappa_0 = \left(r_0 - r_0^*\right)/r_0^* = \left(\sum_{i=\tau}^{\infty} \mathrm{tr}\left(B^i \Sigma (B')^i\right) - \mathrm{tr}\left(G' F^{-1} G\right)\right) / \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathrm{tr}\left(B^i \Sigma (B')^i\right) \geq 0.$$

Сформулируем важные следствия для одномерной авторегрессионной модели AR(p), определенной в (2).

Следствие 2. Пусть имеет место AR(p) модель (2) и существует момент времени $t_* = \max\{t \in M : O_{t_*} = \ldots = O_{t_* + p - 1} = 1\}$. Тогда МП-прогноз (6) функционально не зависит от наблюдений $\{y_t : t < t_*\}$: $A_0 = (A_{01}, \ldots, A_{0K})$, $A_{01} = \ldots = A_{0, \chi(t_*) - 1} = 0$.

Доказательство. Используя метод математической индукции, приходим к утверждению.

Это следствие означает, что оптимальный прогноз и его риск являются устойчивыми к подшаблону $\{t \in M : t \leq t_* - 1\}$ для случая, когда истинные значения модельных параметров B, Σ известны точно.

Следствие 3. Если имеет место модель (2) с шаблоном $M_m = \{t_-, \ldots, t_+\} \setminus \{m\}$ с одним пропуском y_m в момент времени $m \in \{t_+ - p + 1, \ldots, t_+\}$ и $K = t_+ - t_- \geq 2p$, то коэффициент неустойчивости риска для МП-прогноза при $\tau = 1$ равен:

$$\kappa(m) = \beta_{t_+ + 1 - m}^2 / \left(1 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_{t_+ - m}^2\right). \tag{9}$$

Доказательство. Используя представление функции правдоподобия в виде, предложенным Боксом – Дженкинсом, интегрируя его по y_m и максимизируя по $y_{t_+ + 1}$, приходим к (9).

Легко заметить из (9), что если коэффициент авторегрессиии $\beta_{t_+ + 1 - m} = 0$, тогда $\kappa(m) = 0$ и риск прогнозирования устойчив к пропущенному значению y_m. Формула (9) дает также выражение для области изменения коэффициента неустойчивости риска: $\kappa_- = \min\limits_{0 \leq j \leq p-1} \left(s_{j+1} - s_j\right)/s_j \leq \kappa \leq \kappa_+ = \max\limits_{0 \leq j \leq p-1} \left(s_{j+1} - s_j\right)/s_j$, где $s_0 = 1$, $s_j =$ $= 1 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_j^2$. Наиболее влиятельным оказывается пропуск y_{m^*} в момент времени m^*, для которого $\kappa(m^*) = \kappa_+$.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В СЛУЧАЕ НЕИЗВЕСТНЫХ B, Σ

Теорема 2. Если B, Σ неизвестны, то МП-прогноз для $Y_{t_+ + \tau}$ есть

$$\hat{Y}_{t_+ + \tau} = A_0\left(\hat{B}, \hat{\Sigma}\right)X, \tag{10}$$

где МП-оценки $\hat{B}, \hat{\Sigma}$ являются решением минимизационной задачи: $l_1(B, \Sigma) = X'F^{-1}X + \ln|F| + \ln\left|H - G'F^{-1}G\right| \to \min\limits_{B,\Sigma}$.

Доказательство. Согласно (8), совместные МП-оценки для $Y_{t_+ + \tau}, B, \Sigma$ есть решение экстремальной задачи: $l\left(Y_{t_+ + \tau}; B, \Sigma\right) \to \max\limits_{Y_{t_+ + \tau}; B, \Sigma}$. Из теоремы 2 получаем (10), где $\hat{B}, \hat{\Sigma}$ – решение задачи: $n_K(X \mid 0_K, F) n_p\left(G'F^{-1}X \mid G'F^{-1}X, H - G'F^{-1}G\right) \to \max\limits_{B,\Sigma}$. Взяв логарифм, приходим к доказываемому утверждению.

Из-за вычислительной сложности проблемы минимизации в (10) предложим модифицированные МНК-оценки. Будем рассматривать ситуацию с однородным шаблоном наблюдений: $O_t = 0_p$ или $O_t = 1_p$. Обозначим $t_0 = t_-$ и представим последовательность регистрируемых наблюдений в форме: $Y_{t_0}, Y_{t_0+1}, \ldots, Y_{t_0+l_0}, \ldots, Y_{t_n}, Y_{t_n+1}, \ldots, Y_{t_n+l_n}$, $\Im = \{t_0+1, \ldots, t_0+l_0, \ldots, t_n+1, \ldots, t_n+l_n\}$, $T_0 = |\Im| = l_0 + \ldots + l_n \ge n+1$, где $n+1$ – число серий без пропусков. Введем обозначения: $\otimes$ – кронекерово произведение матриц, $\mathrm{vec}(A)$ – векторизация матрицы A по строкам. Предположим, что $T_0 > p$, $\left|\sum\limits_{t\in\Im} Y_{t-1}Y'_{t-1}\right| \ne 0$, и представим модификации оценок Андерсона [1] для ситуации с пропусками:

$$\breve{B} = \sum_{t\in\Im} Y_t Y'_{t-1}\left(\sum_{t\in\Im} Y_{t-1}Y'_{t-1}\right)^{-1}, \quad \breve{\Sigma} = \frac{1}{T_0}\sum_{t\in\Im}\left(Y_t - \breve{B}Y_{t-1}\right)\left(Y_t - \breve{B}Y_{t-1}\right)'.$$

Теорема 3. Если $T_0 \to \infty$, $T_0 / n \to \infty$, и матрица $\tilde{\Sigma}$ положительно определена, тогда оценки $\breve{B}, \breve{\Sigma}$ состоятельны: $\operatorname*{plim}\limits_{T_0\to\infty} \breve{B} = B$, $\operatorname*{plim}\limits_{T_0\to\infty} \breve{\Sigma} = \Sigma$, и случайный вектор $\mathrm{vec}\left(\sqrt{T_0}\left(\breve{B}' - B'\right)\right)$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\tilde{\Sigma}^{-1} \otimes \Sigma$.

Доказательство. Несложно заметить, что имеет место матричная сходимость по вероятности: $\operatorname*{plim}\limits_{T_0\to\infty}\left(T_0^{-1}\sum\limits_{t\in\Im} Y_t Y'_t - T_0^{-1}\sum\limits_{t\in\Im} Y_{t-1}Y'_{t-1}\right) = 0_{p\times p}$. Она следует из закона больших чисел и следующего неравенства для дисперсий:

$$D\left\{T_0^{-1}\sum_{k=0}^{n}\left(y_{t_k+l_k,i}y_{t_k+l_k,j}-y_{t_k,i}y_{t_k,j}\right)\right\}\le\left(\frac{n}{T_0}\right)^2\max_{0\le k\le n}D\left\{y_{t_k+l_k,i}y_{t_k+l_k,j}-y_{t_k,i}y_{t_k,j}\right\}\le$$

$$\le 4\left(\frac{n}{T_0}\right)^2 E\left\{\left(y_{t_0,i}y_{t_0,j}\right)^2\right\}.$$

Далее, следуя схеме доказательства этого утверждения для случая полных данных [1], приходим к сходимости по вероятности и асимптотической нормальности.

Исследуем влияние погрешности оценивания модельных параметров на величину риска аналитическим и численным методами. Численный анализ приведен в следующем разделе. Аналитическое исследование проведем для модели AR(1) при $t_- = 1$, $t_+ = T$, $O_t = 1, t = t_-,...,t_+$, $\tau = 1$. Будем рассматривать функционал:

$$\tilde{r} = E\left\{\left(\frac{y_1\xi_2+...+y_{T-1}\xi_T}{T}y_T\right)^2\right\}\frac{1}{\gamma_0^2}+\sigma^2, \tag{11}$$

который назовем «упрощенным» риском. Выбор термина «упрощенный» основан на том, что введенная величина получается из риска прогнозирования при использовании оценок Андерсона:

$$r = E\left\{\left(\hat{y}_{T+1}-y_{T+1}\right)^2\right\} = E\left\{\left(\frac{y_1\xi_2+...+y_{T-1}\xi_T}{y_1^2+...+y_{T-1}^2}y_T\right)^2\right\}+\sigma^2 \tag{12}$$

формальным переходом к пределу по вероятности в знаменателе.

Теорема 4. Для упрощенного риска (11) справедливо асимптотическое разложение:

$$\tilde{r} = \sigma^2+\frac{\sigma^2}{T}+\frac{6\beta^4+11\beta^2+3}{1-\beta^4}\frac{\sigma^2}{T^2}+o\left(\frac{1}{T^2}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Используя представление $y_t = \sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\xi_{t-i}$ и известные выражения для моментов шестого порядка нормального инновационного процесса ξ_t, приходим к утверждению.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для того чтобы сравнить теоретические и экспериментальные результаты, проведем две серии экспериментов. В первой серии рассмотрим модель AR(11) для классических центрированных данных по численности канадской рыси «The Canadian Lynx data 1821–1934» (Tong, 1977): $y_t = 1.0938y_{t-1} - 0.3571y_{t-4} + 0.3244y_{t-10} - 0.3622y_{t-11} + \xi_t$, $\sigma^2 = 0.04405$, $t_- = 1$, $t_+ = T = 113$ при наличии одного пропущенного значения в момент времени $m \in \{T-p+1,...,T-1\}$ (шаблон M_m) и различных уровнях априорной информации о параметрах. Проводились эксперименты по методу Монте-Карло со 100 000 реализаций временных рядов для того чтобы вычислить экспериментальное значение коэффициента неустойчивости риска κ и его 95 % доверительный интервал. Рис. 1 представляет значения теоретического коэффициента неустойчивости риска (9) и его 95 % доверительный интервал при различных значениях m для случая известных значений модельных параметров. Рис. 2 представляет экспериментальные значения коэффициента неустойчивости риска κ_2 и его 95 % доверительный интервал для случая «plug-in» прогнозирования, основанного на предложенных оценках $\breve{B},\breve{\Sigma}$. Во второй серии экспериментов исследовалось асимптотическое поведение риска для модели AR(1) для следующих значений модельных параметров: $\beta = 1/2$, $\sigma^2 = 1$. На рис. 3 представлены теоретический риск (12), «упрощенный» риск (11) и асимптотическая апроксимация (13). Рис. 1, 2, 3 показывают достаточно хорошее соответствие теоретического и эмпирического рисков.

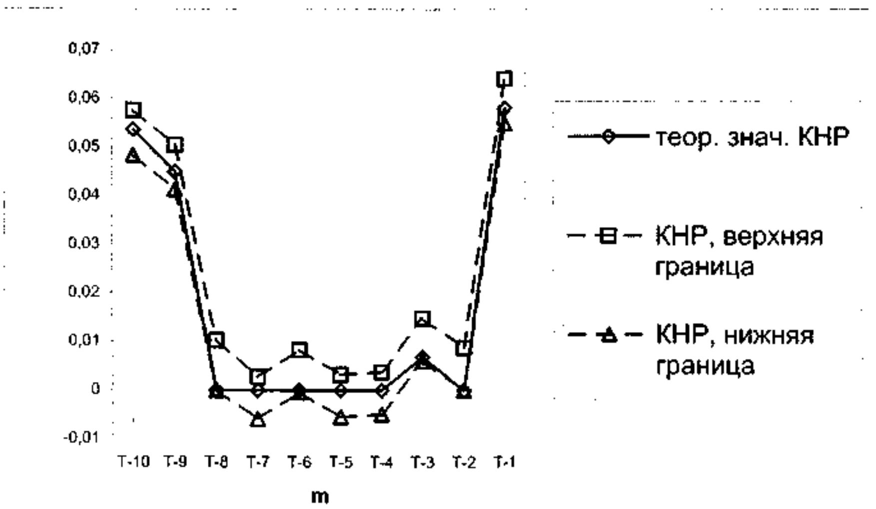

Рис. 1. Теоретические значения коэффициента неустойчивости риска (КНР)

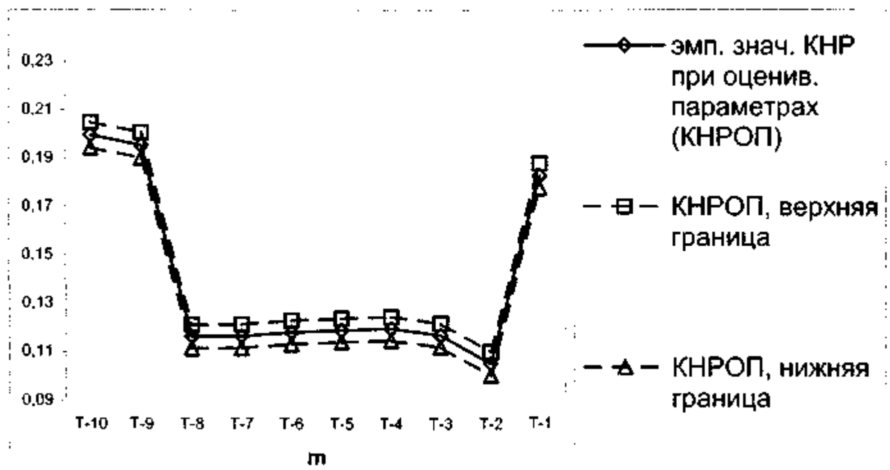

Рис. 2. Эмпирические значения коэффициента неустойчивости риска при оцениваемых параметрах

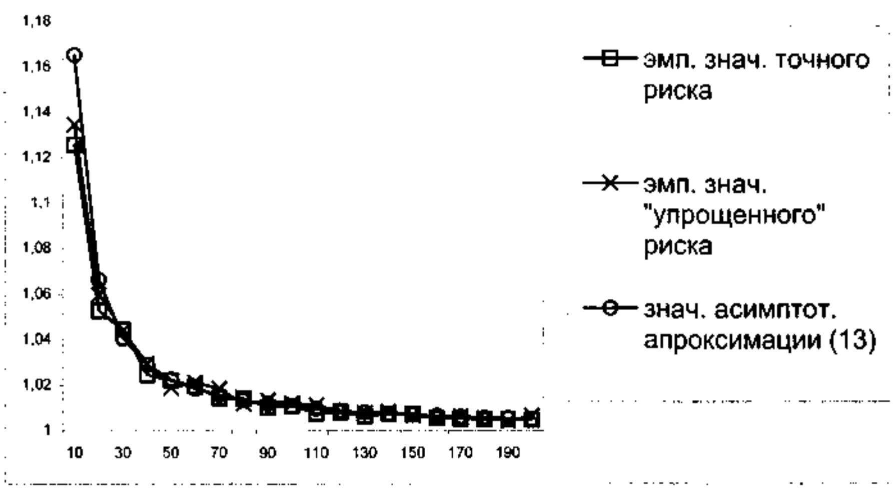

Рис. 3. Зависимость риска от длительности наблюдения

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson T. W.* The Statistical Analysis of Time Series // Wiley. N.Y., 1971.
2. *Greene W. H.* Econometric Analysis // Macmillan. N.Y., 2000.
3. *Kharin Yu.* Robustness in Statistical Pattern Recognition // Kluwer. Dordrecht, 1996.
4. *Kharin Yu.* Robustness Analysis in Forecasting of Time Series, in: R. Dutter et al., eds. Development in Robust Statistics // Springer: Heidelberg. N. Y., 2000. P. 180–193.
5. *Kharin Yu., Huryn A.* Statistical Analysis and Forecasing of Autoregressive Time Series under Missing Values // Bulletin of the International Statistic Institute, 54th Session. 2003. Book 1. Vol. 60. P. 612–613.
6. *Kharin Yu., Huryn A.* Statistical Estimation of Parameters for Autoregressive Time Series with Missing Values // PRIP'2003. Pattern Recognition and Information Processing. Minsk (Belarus) – Szczecin (Poland). 2003. P. 85–90.
7. *Kharin Yu., Maevskiy V.* Robust Regressive Forecasting under Functional Distortions in a Model // Automation and Remote Control. 2002. 63(11). P. 1803–1820.
8. *Kohn R., Ansley C. F.* Estimation, Prediction and Interpolation for ARIMA Models with Missing Data // JASA. 1986. 81(395). P. 751–761.
9. *Little R., Rubin D.* Statistical Analysis with Missing Data // Wiley. N.Y., 1987.
10. *Nijman T., Palm F.* Parameter Identification in ARMA Processes in the Presence of Regular but Incomplete Sampling // JTSA. 1990. 11(3). P. 239–238.
11. *Pantula S. G., Shin D.* Testing for a Unit Root in AR Processes with Systematic but Incomplete Sampling // Stat.&Prob. Letters. 1993. 18. P. 183–190.
12. *Pourahmadi M.* Estimation and Interpolation of Missing Values of a Stationary Time Series // JTSA. 1989. 10(2). P. 149–169.
13. *Pourahmadi M.* Foundations of Time Series and Prediction Theory // Wiley. N.Y., 2001.
14. *Shafer J. L.* Analysis of Incomplete Data // Chapmen&Hall. London, 1997.
15. *Stockinger N., Dutter R.* Robust Time Series Analysis: a Survey // Kybernetika. 1987. 23. P. 1–91.
16. *Tong H.* Some Comments on the Canadian Lynx Data // J. Roy. Statist. Soc. 1977. Ser. A., 140. P. 432–436.
17. *Tong H.* Non-linear Time Series // Clarendon Press. Oxford, 1999.