ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ ОДНОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Е. И. Мирская

Брестский государственный университет
г. Брест, Беларусь

Исследована скорость сходимости первых двух моментов сглаженной оценки взаимной спектральной плотности многомерного вариационного ряда.

Ключевые слова: стационарный случайный процесс, спектральная плотность, оценка конечного преобразования Фурье, периодограмма.

Рассмотрим действительный r-мерный стационарный случайный процесс $X(t)=\left\{X_a(t), a=\overline{1,r}\right\}, t\in Z=\{0,\pm1,...\}$, с MX(t) = 0, неизвестной взаимной ковариационной функцией $R_{ab}(\tau), \tau\in Z$, и неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda), a,b=\overline{1,r}, \lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$

В работе [1] в качестве оценки взаимной спектральной плотности исследована статистика

$$\hat{f}_{ab}(\lambda)=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_{ab}(\lambda,l), \tag{1}$$

$\lambda\in\Pi, a,b=\overline{1,r}$, построенная по T = LN − (L − 1) K наблюдениям, где L – число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, K, L – целые числа, не зависящие от T, а $I_{ab}(\lambda,l)$ – модифицированная периодограмма.

Показано, что оценка $\hat{f}_{ab}(\lambda)$ является асимптотически несмещенной при $N\to\infty$, а при дополнительных ограничениях на взаимные спектральные плотности второго порядка и семиинвариантные спектральные плотности четвертого порядка

$$\lim_{N\to\infty}\operatorname{cov}\left\{\hat{f}_{a_1b_1}(\lambda_1), \hat{f}_{a_2b_2}(\lambda_2)\right\}=$$

$$=\begin{cases} 0, & \lambda_1\pm\lambda_2\neq 0 \ (\mathrm{mod}\ 2\pi), \\ \dfrac{C_2}{L} f_{a_1b_2}(\lambda_1) f_{b_1a_2}(\lambda_2), & \lambda_1+\lambda_2=0 \ (\mathrm{mod}\ 2\pi), \\ & \lambda_1,\lambda_2\neq 0 \ (\mathrm{mod}\ \pi), \\ \dfrac{C_3}{L} f_{a_1a_2}(\lambda_1) f_{b_1b_2}(-\lambda_2), & \lambda_1-\lambda_2=0 \ (\mathrm{mod}\ 2\pi), \\ & \lambda_1,\lambda_2\neq 0 \ (\mathrm{mod}\ \pi), \\ \dfrac{C_2}{L} f_{a_1b_2}(0) f_{b_1a_2}(0)+\dfrac{C_3}{L} f_{a_1a_2}(0) f_{b_1b_2}(0), & \lambda_1=\lambda_2=0 \ (\mathrm{mod}\ \pi), \end{cases} \tag{2}$$

где C_2, C_3 – некоторые постоянные, $a_i,b_i=\overline{1,r}, \lambda_i\in\Pi, i=1,2$.

Рассмотрим оценку, использующую статистику (1), следующего вида

$$\tilde{f}_{ab}(\lambda)=\frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T} W_{ab}\left(\lambda-\frac{2\pi s}{T}\right)\hat{f}_{ab}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \tag{3}$$

где $W_{ab}(x), x\in R, a,b=\overline{1,r}$ – спектральное окно.

Исследуем скорость сходимости первых двух моментов оценки, заданной (3) в предположении, что $f_{ab}(\lambda), \lambda \in \Pi$, удовлетворяет следующему условию:

$$\left|f_{ab}(x+\lambda) - f_{ab}(\lambda)\right| \le C|x|^{\alpha}, \tag{4}$$

$0 < \alpha \le 1$, для любых $x \in \Pi, C$ – некоторая положительная постоянная.

Предположение. Пусть $W_{ab}(x)$ непрерывная, периодическая функция с периодом 2π, имеет ограниченную вариацию и является ядром.

Теорема 1. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(x), x \in \Pi, a,b = \overline{1,r}$, удовлетворяет соотношению (4), спектральные окна удовлетворяют предположению 1, то для математического ожидания оценки $\tilde{f}_{ab}(\lambda), \lambda \in \Pi$, задаваемой (3), имеет место равенство

$$\left|M\tilde{f}_{ab}(\lambda) - f_{ab}(\lambda)\right| = O\left(\int\limits_{\Pi} |x|^{\alpha} |\Phi_{ab}(x)| dx\right) + O\left(\int\limits_{\Pi} |y|^{\alpha} |W_{ab}(y)| dy\right) + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

где

$$\Phi_{ab}(x) = (2\pi \sum_{\rho=0}^{N-1} h_a^N(\rho) h_b^N(\rho))^{-1} \varphi_a(x) \overline{\varphi_b(x)}, \quad \varphi_a(x) = \sum_{\rho=0}^{N-1} h_a^N(\rho) e^{i\rho x},$$

$0 < \alpha \le 1, x \in \Pi, a,b = \overline{1,r}$, а $h_a^N(\rho)$ – окна просмотра данных, свойства которых рассмотрены в работе [2].

Доказательство. Нетрудно показать, что если на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию, то

$$\left|\frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T} f\left(\frac{2\pi s}{T}\right) - \int\limits_{\Pi} f(x) dx\right| = O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{5}$$

Используя (4),(5) соотношение, получим

$$I = \left|M\tilde{f}_{ab}(\lambda) - f_{ab}(\lambda)\right| = \left|\iint\limits_{\Pi^2} W_{ab}(y) \Phi_{ab}(z+y) f_{ab}(z+\lambda) dz dy - f_{ab}(\lambda) + O\left(\frac{1}{T}\right)\right|.$$

Сделаем замену переменных $u = z + y, y = y$, тогда

$$I \le \iint\limits_{\Pi^2} |W_{ab}(y)| |\Phi_{ab}(u)| |f_{ab}(u - y + \lambda) - f_{ab}(\lambda)| dy du + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Учитывая соотношение (4), можем записать

$$\left|M\tilde{f}_{ab}(\lambda) - f_{ab}(\lambda)\right| \le C \iint\limits_{\Pi^2} |u - y|^{\alpha} |W_{ab}(y)| |\Phi_{ab}(u)| dy du + O\left(\frac{1}{T}\right) \le$$

$$\le C \int\limits_{\Pi} |y|^{\alpha} |W_{ab}(y)| dy + C \int\limits_{\Pi} |u|^{\alpha} |\Phi_{ab}(u)| du + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Откуда следует требуемый результат. Теорема доказана.

Теорема 2. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(x), a,b = \overline{1,r}$, непрерывна в точках λ_1, λ_2 и ограничена на Π, семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка непрерывна в точке $(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_2)$ и ограничена на Π^3, окна просмотра данных

$h_a^N(t), t \in R, a = \overline{1,r},$ ограничены единицей и имеют ограниченную вариацию, спектральные окна удовлетворяют предположению 1,

$$\int_{\Pi} W_{ab}^2(x)dx < \infty,$$

$$\sup_N \iiint_{\Pi^3} \left|\Phi_{a_1a_2a_3}(u_1,u_2,u_3)\right| du_1du_2du_3 \le C, \qquad (6)$$

где C – некоторая положительная постоянная,

$$\Phi_{a_1a_2a_3}(u_1,u_2,u_3) = ((2\pi)^3 \sum_{\rho=0}^{N-1} h_{a_1}^N(\rho) h_{a_2}^N(\rho) h_{a_3}^N(\rho))^{-1} \times$$

$$\times \varphi_{a_1}(u_1)\varphi_{a_2}(u_2)\varphi_{a_3}(u_3)\overline{\varphi_{a_4}(u_1+u_2+u_3)},$$

то для статистики, задаваемой выражением (3), справедливо соотношение

$$\operatorname{cov}\left\{\tilde{f}_{a_1b_1}(\lambda_1), \tilde{f}_{a_2b_2}(\lambda_2)\right\} = O\left(\frac{1}{T}\right),$$

$a_i, b_i = \overline{1,r}, \lambda_i \in \Pi, i = 1,2.$

Доказательство. Используя определение ковариации и свойства математического ожидания, получим

$$\operatorname{cov}\left\{\tilde{f}_{a_1b_1}(\lambda_1), \tilde{f}_{a_2b_2}(\lambda_2)\right\} = (\frac{2\pi}{T})^2 \sum_{s=1}^{T}\sum_{r=1}^{T} W_{a_1b_1}(\lambda_1 - \frac{2\pi s}{T}) \times$$

$$\times W_{a_2b_2}(\lambda_2 - \frac{2\pi r}{T}) \operatorname{cov}\left\{\hat{f}_{a_1b_1}(\frac{2\pi s}{T}), \hat{f}_{a_2b_2}(\frac{2\pi r}{T})\right\}.$$

Учитывая соотношение (2) и приблизив сумму интегралом и переходя к пределу, можем записать

$$\lim_{T\to\infty} T \operatorname{cov}\left\{\tilde{f}_{a_1b_1}(\lambda_1), \tilde{f}_{a_2b_2}(\lambda_2)\right\} =$$

$$= \frac{2\pi C_3}{L} \int_{\Pi} W_{a_1b_1}(\lambda_1 - \alpha) W_{a_2b_2}(\lambda_2 - \alpha) f_{a_1a_2}(\alpha) f_{b_1b_2}(-\alpha) d\alpha +$$

$$+ \frac{2\pi C_2}{L} \int_{\Pi} W_{a_1b_1}(\lambda_1 - \alpha) W_{a_2b_2}(\lambda_2 + \alpha) f_{a_1b_2}(\alpha) f_{a_2b_1}(-\alpha) d\alpha.$$

Откуда, учитывая ограниченность взаимной спектральной плотности на П и соотношение (6), получим требуемый результат. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Труш Н. Н., Мирская Е. И.* Статистические свойства оценок спектральных плотностей по пересекающимся интервалам наблюдений. Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования: Сб. науч. ст. Мн., 1991. С. 180–185.

2. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория. М., 1980. 536 с.