2. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 65 с.
3. *Chikrii A.A.* Conflict-Controlled Processes, Kluwer Academic Publishers, Boston-London-Dordrecht, 1997, 424 p.
4. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 198 с.
5. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. – Ижевск: Изд-во Удмуртский университет, 2009. – 266 с.
6. *Чикрий А.А.* Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения. Труды математического института им. В.А. Стеклова, 2010, т. 271. – С. 76-92.
7. *Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А.* Динамические игры с разрывными траекториями – К.: Наук. думка, 2005. – 220 с.
8. *Chikrii A.A.* Optimization of Game Interaction of Fractional-Order Controlled Systems, J. Optimization Methods and Software, Taylor and Francis Group, Ltd Oxfordshire, UK, 2008, vol. 3, N 1, P. 39-73.

О СТРУКТУРЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Л.Г. Шагалова, Н.Н. Субботина

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
С. Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия
shag@imm.uran.ru, subb@uran.ru

В настоящей работе результаты и методы теории оптимального управления [1] применяются для исследования структуры и свойств обобщенного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби, рассматриваемого в замкнутой полосе фазового пространства.

В [2] для модели Кроу – Кимуры молекулярной эволюции было получено уравнение Гамильтона – Якоби

$$\partial u / \partial t + H(x, \partial u / \partial x) = 0, \quad (1)$$

где

$$H(x, p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2} e^{2p} - \frac{1-x}{2} e^{-2p}. \quad (2)$$

Входящая в (2) функция $f(\cdot)$ называется фитнесом. Уравнение (1) рассматривается при $t \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$. Предполагается также, что задана функция $u_0 : R \rightarrow R$ и выполняется начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-1; 1]. \quad (3)$$

Задача (1)-(3) не имеет классического решения, поэтому её решение следует понимать в обобщенном смысле. При этом не удаётся использовать известные концепции обобщенного решения. В частности, минимаксные [3, 4] решения не рассматривались для задач с фазовыми ограничениями, а известные теоремы существования вязкостного [5, 6, 7] решения доказаны для случая гамильтониана, удовлетворяющего условию коэрцитивности:

$$H(x, p) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Для гамильтониана, задаваемого соотношением (2), условие (4) не выполнено, например при $x = 1$ и $x = -1$.

В [8] введено новое определение непрерывного обобщенного решения начальной задачи (1)-(3) на компактном множестве $\bar{\Pi}_T = [0, T] \times [-1, 1]$. Обобщенное решение определяется посредством неравенств для суб- и супердифференциалов. Доказано, что обобщенное решение существует, но не является единственным.

Гамильтониан (2) в области, задаваемой фазовыми ограничениями, является вогнутым по импульсной переменной. Это обстоятельство позволяет поставить вспомогательную задачу оптимального управления с целевым множеством, состоящим из заданного начального многообразия и границы фазовых ограничений, на которую гладким образом продолжается начальная функция. Непрерывное обобщенное решение задачи (1)-(3) строится с помощью функции цены вспомогательной задачи оптимального управления.

Известно [9], что необходимые условия оптимальности во вспомогательной задаче оптимального управления могут быть представлены с помощью решений характеристической системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x, p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x, p) = f'(x) + (e^{2p} - e^{-2p})/2, \\ \dot{z} &= pH_p(x, p) - H(x, p) \end{aligned} \quad (5)$$

задачи (1)-(3). Здесь $H_x(x, p) = \partial H(x, p)/\partial x$, $H_p(x, p) = \partial H(x, p)/\partial p$, $f'(x) = \partial f(x)/\partial x$. Система (5) рассматривается со следующими начальными условиями, согласованными с (3):

$$x(0, y) = y, \quad p(0, y) = u'_0(y), \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y \in [-1; 1]. \quad (6)$$

В работе исследуются вопросы продолжимости характеристик и равновесные состояния характеристической системы.

Получены достаточные условия существования обобщенного решения задачи (1)-(3) заданной структуры и предложены конструкции его построения.

Представлены результаты моделирования обобщенного решения для различных входных данных задачи — функции фитнеса $f(\cdot)$ и начальной функции $u_0(\cdot)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №11-01-00214), Программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, а также Программы Правительства РФ по поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-64508.2010.1).

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов М.: Наука, 1961.
2. Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A. Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2008. V. 78. No. 4. 041908. P. 1–6.
3. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
4. Subbotin A.I. Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhauser, 1995.
5. Crandall M.G., Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277, No. 1. P. 1–42.
6. Crandall M.G., Newcomb R. Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations at the Boundary // Proc. AMS. 1985. V. 94. No. 2, P. 283–290.
7. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L. Hamilton-Jacobi Equations with State Constraints // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 318. No. 2. P. 643–683.
8. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та мат. и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 191–208.
9. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern Math. Appl. 2004. V. 20. P. 2955–3091.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ СКОРЕЙШЕГО ПРОХОЖДЕНИЯ ОБЛАСТИ

А.Н. Шахидзе, С. Очилов

Рассматривается формализованная задача оптимизации времени прохождения области объектом, поведение которого зависит от выбора параметра вида