Общим выводом робастного анализа является следующее утверждение: при наличии неопределенности с размахом γ подавление хаоса гарантированно обеспечит пара корректирующих поправок $\left(h^u_{\alpha\min}, h^u_{\beta\min}\right)$, которые являются решением задачи оптимальной коррекции и соответствуют правой границе зоны неопределенности $\beta = \beta(\alpha)|_{f=f+\gamma}$.

Представлены примеры, показывающие применимость схемы робастного анализа к другим известным хаотическим осцилляторам.

Список литературы

1. *Chacon R.* Control of homoclinic chaos by weak periodic perturbations. – Singapore: World Scientific, 2005.
2. *Guckenheimer J., Holmes P.J.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields. – New York: Springer-Verlag, 1983.
3. textitLi H., Liao X. and Liao R. A unified approach to chaos suppressing and inducing in a periodically forced family of nonlinear oscillators // IEEE Transactions on Circuits and Systems I. 2012. V. 59(4). P. 784–795.
4. *Rega G., Lenci S.* Recent advances in control of complex dynamics in mechanical and structural systems. M.A.F. Sanjuan and C. Grebogi, eds. Recent Progress in Controlling Chaos. – Singapore: World Scientific, 2010. P. 189–237.
5. *Simiu E.* Chaotic transitions in deterministic and stochastic dynamical systems: applications of Melnikov processes in engineering, physics and neuroscience. – New Jersey: Princeton University Press, 2002.
6. *Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Многопараметрический анализ на основе критерия Мельникова и оптимальное подавление хаоса в периодически возмущаемых динамических системах // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19. № 4. С. 77–90.

ТОЧНЫЕ ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ В РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Г.Ш. Тамасян

Санкт-Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики–процессов управления
Университетский пр. 35, 198504 Старый Петергоф, Россия
grigoriytamasjan@mail.ru

Введение. Хорошо известно (см. [1]), что проблема решения краевой задачи для дифференциального уравнения эквивалентна некоторой задаче вариационного исчисления. В [2] изложен конструктивный подход применения негладкого анализа [3] и теории точных штрафных функций [2, 4, 5] в решение различных задач вариационного исчисления и теории управления [6, 7, 8]. Предметом настоящей работы является изложение результатов применения данной техники в решении вариационной задачи при линейных краевых условиях. Получены в «новой» форме необходимые условия экстремума и на их основе построены численные алгоритмы (прямые методы) наискорейшего и гиподифференциального спусков.

1. Постановки задачи. Пусть $T > 0$ фиксировано. Через $P^2[0,T]$ обозначим класс непрерывно-дифференцируемых на $[0,T]$ функций с кусочно-непрерывной и ограниченной на $[0,T]$ второй производной.

Пусть заданы α_k, β_k, α, $\beta \in \mathbb{R}$ при $k = 0, 1$.

Задача. Среди кривых, принадлежащих классу $P^2[0,T]$, удовлетворяющих краевым условиям

$$\alpha_0 x(0) + \alpha_1 x'(0) = \alpha, \qquad \beta_0 x(T) + \beta_1 x'(T) = \beta, \tag{1}$$

найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$I(x) = \int_0^T F(x(t), x'(t), x''(t), t)\, dt, \tag{2}$$

где функцию F будем считать непрерывно-дифференцируемой по всем своим аргументам на $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,T]$.

2. Эквивалентная постановки задачи. Переформулируем поставленную задачу. Обозначим через $z(t) = x''(t)$, $x_0 = x(0)$, $y_0 = x'(0)$, тогда

$$x'(t) = y_0 + \int_0^t z(\tau)\, d\tau, \qquad x(t) = x_0 + t y_0 + \int_0^t \int_0^\tau z(\gamma)\, d\gamma d\tau.$$

Рассмотрим множество

$$Z = \Big\{ \widetilde{z} = [x_0, y_0, z] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times P[0,T] \;\Big|\; \varphi(\widetilde{z}) = 0 \Big\},$$

где $P[0,T]$ — множество кусочно-непрерывных, ограниченных на отрезке $[0,T]$ функций,

$$\varphi(\widetilde{z}) = |\alpha_0 x_0 + \alpha_1 y_0 - \alpha| + |\beta_0 x_1 + \beta_1 y_1 - \beta|,$$

$$x_1 = x(T) = x_0 + T y_0 + \int_0^T \int_0^\tau z(\gamma)\, d\gamma d\tau, \qquad y_1 = x'(T) = y_0 + \int_0^T z(\tau)\, d\tau.$$

Введем функционал

$$f(\widetilde{z}) = \int_0^T F\Big(x_0 + t y_0 + \int_0^t \int_0^\tau z(\gamma)\, d\gamma d\tau, y_0 + \int_0^t z(\tau)\, d\tau, z(t), t\Big) dt.$$

Несложно показать, что задача (1), (2) эквивалентна задаче $f(\widetilde{z}) \longrightarrow \min\limits_{\widetilde{z}\in Z}$.

Пусть $\lambda \geqslant 0$ фиксировано. Введем функцию

$$\Phi_\lambda(\widetilde{z}) = f(\widetilde{z}) + \lambda\varphi(\widetilde{z}). \tag{3}$$

Функция $\Phi_\lambda(\widetilde{z})$ называется *штрафной функцией*, а число λ — *штрафным параметром*. В [2, 5] представлен ряд теорем, при выполнении которых $\Phi_\lambda(\widetilde{z})$ является функцией точного штрафа. Исследуемый функционал (3) является функцией точного штрафа, поэтому задача $f(\widetilde{z}) \longrightarrow \min\limits_{\widetilde{z}\in Z}$ эквивалентна задаче минимизации функционала $\Phi_\lambda(\widetilde{z})$ на всем пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times P[0,T]$.

Используя классическую вариацию для аргумента $\widetilde{z}$ функционала Φ_λ можно выписать вариацию функционала (3).

Теорема 1. *Для того, чтобы $\widetilde{z}_* \in Z$ была точкой глобального или локального минимума функции $f(\widetilde{z})$ на множестве Z, необходимо, чтобы нашлись константы $w_k^* \in [-\lambda, \lambda]$, $k = \overline{1,2}$, такие, что*

$$F'_z(t) + \int_t^T F'_{x'}(\gamma)\,d\gamma + \int_t^T (\gamma - t)F'_x(\gamma)\,d\gamma + w_2^*(\beta_0(T-t) + \beta_1) = 0,$$

$$\int_0^T F'_x(t)\,dt + w_1^*\alpha_0 + w_2^*\beta_0 = 0,$$

$$\int_0^T (tF'_x(t) + F'_{x'}(t))\,dt + w_1^*\alpha_1 + w_2^*(\beta_0 T + \beta_1) = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00752).

Список литературы

1. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.
2. *Демьянов В.Ф.* Условия экстремума и вариационные задачи. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
3. *Демьянов В.Ф. Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
4. *Еремин И.И.* Метод «штрафов» в выпуклом программировании // Доклады АН СССР, 1967. Т. 143, № 4. С. 748–751.
5. *Демьянов В.Ф.* Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации // Вестник С-Петербург. унив. Сер 1. 1994. Вып. 4. № 22. С. 21-27.
6. *Demyanov V.F., Giannessi F., Karelin V.V.* Optimal Control Problems via Exact Penalty Functions. J. Global Optim., 12:3. 1998. p. 215–223.

7. *Демьянов В.Ф., Тамасян Г.Ш.* О прямых методах решения вариационных задач // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 36-47.
8. *Tamasyan G.Sh.* Numerical methods in problems of calculus of variations for functionals depending on higher order derivatives // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 188, № 3. p. 299-321. 2013. Translated from Problems in Mathematical Analysis 67, November 2012, pp. 113-132

МОДЕЛЬ, СОДЕРЖАЩАЯ СВЯЗАННЫЕ ПОДСИСТЕМЫ: КОЛЕБАНИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ, СТАБИЛИЗАЦИЯ

В.Н. Тхай[1], И.Н. Барабанов[1,2]

[1] Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Профсоюзная 65, 117997 Москва, Россия

tkhaivn@yandex.ru

[2] МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет,

Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Россия

ivbar@ipu.ru

Изучается модель, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которой выделяются подсистемы, описывающиеся системами автономных ОДУ. Связь между подсистемами задается параметром ε; при $\varepsilon = 0$ модель распадается на независимые подсистемы. Таких параметров в МССП может быть один или несколько, при этом параметры отражают иерархичность подсистем в МССП. Размерность каждой подсистемы в МССП в общем случае индивидуальная, а сама подсистема может быть линейной или нелинейной. В случае малых значений ε получим модель, содержащую слабо связанные подсистемы.

Примеры МССП — это N-планетная задача (Солнечная система), система взаимодействующих подвижных объектов (роботов, самолетов и т.п.), поступательно-вращательное движение спутника Земли, цепочки осцилляторов и др.

По классификации МССП относится к сложным механическим системам. Для нее характерны следующие отличительные признаки: иерархичность, многоуровневость, многорежимность, нелинейность, высокая размерность. МССП относится также к «большим системам».

Взаимовлияние подсистем в МССП может быть разным. Так, в случае, когда поведение всех подсистем, кроме одной, полностью описано, получается задача об исследовании отдельной системы под действием известного воздействия. В задаче о спутнике Земли движение центра