Режим колебаний в каждой подсистеме задается в соответствии с определением 2. Комбинация режимов МССП, где в подсистемах имеются только о-точки, называется основным режимом колебаний в МССП.

Приводятся результаты решения задачи колебаний, их бифуркации, устойчивости и стабилизации для для основного режима колебаний МССП.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы 14 ОЭММПУ РАН и РФФИ (проекты 13-01-00347, 13-01-00376).

Список литературы

1. *Тхай В.Н.* Модель, содержащая связанные подсистемы. // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 32–41.
2. *Тхай В.Н.* Колебания и устойчивость в квазиавтомной системе. I. // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 90–98.
3. *Барабанов И.Н., Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний из однопараметрического семейства автономной системы // Автоматика и телемеханика. 2009. № 2. С. 34–41

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ И ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

А.А. Финогенко

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Лермонтова 134, 664033 Иркутск, Россия

fin@icc.ru

Исследование асимптотической устойчивости с использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными восходят к известным теоремам Барбашина-Красовского [1] для автономных систем $\dot{x} = f(x)$, где $f : R^n \rightarrow R^n$, R^n — n -мерное векторное пространство. При этом требуется дополнительный анализ множества $E(\dot{V} = 0) \triangleq \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ нулей производной функции Ляпунова $V(x)$ на наличие в нем целых траекторий системы. Выводы, которые можно сделать лишь из свойства знакопостоянства производной $\dot{V}(x)$, позднее были аккумулированы в теореме Ла-Салля, известной, как принцип инвариантности (см. [2]): для автономного дифференциального уравнения ω -предельное множество решения принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества $E(\dot{V} = 0)$. Для неавтономных уравнений на этом пути возникают трудности, связанные с тем, что ω -предельные множества не обладают какими-либо свойствами инвариантности относительно исходных уравнений.

Кроме этого, возникает вопрос о том, что понимать под множеством $E(\dot{V} = 0)$, так как производная $\dot{V}$ зависит не только от переменной x , но и от t .

Попытки преодолеть эти трудности и перенести принцип инвариантности на неавтономные уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

привели к понятию предельных уравнений

$$\dot{x} = f'(t, x),$$

где $f(t_k + t, x) \rightarrow f'(t, x)$ при $t_k \rightarrow +\infty$. Теперь, если $V(t, x)$ — функция Ляпунова, удовлетворяющая неравенству $\dot{V}(t, x) \leq w(t, x) \leq 0$ в силу уравнения (1), то некоторый аналог принципа инвариантности для неавтономного уравнения (1) может быть установлен в терминах так называемой предельной пары (f', w') .

Мы рассматриваем дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где $F : R^{1+n} \rightarrow R^n$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями. Обозначим $F^\tau(t, x) = F(t+\tau, x)$ — „сдвиг“ многозначного отображения $F(t, x)$. Для последовательности $t_k \rightarrow +\infty$ (одной и той же для любой точки (t, x)) определим *предельное относительно этой последовательности отображение*:

$$F'(t, x) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{co} \cup_{k \geq n} F^{t_k}(t, x),$$

где $\overline{co}$ — знак выпуклой замкнутой оболочки множества. Дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t, x) \quad (3)$$

будем называть *предельным относительно последовательности $t_k \rightarrow +\infty$* . Дифференциальные включения (2) и (3) изучаются в рамках следующих условий:

A1. Для любого числа γ существует константа $M > 0$, такая, что для любых точек $(t, x) \in (\gamma, +\infty) \times R^n$ выполняется неравенство $\|z\| \leq M(1 + \|x\|)$ для всех $z \in F(t, x)$.

A2. Для любого фиксированного x многозначное отображение $t \rightarrow F(t, x)$ измеримо.

A3. Многозначное отображение $x \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно сверху в каждой точке x равномерно по $t \in (\gamma, +\infty)$. Это означает следующее: для любых чисел $\epsilon > 0$ и γ существует число $\delta = \delta(\epsilon, \gamma, x) > 0$

такое, что выполняется $F(t, x') \subset (F(t, x))^\epsilon$ для всех (t, x') , удовлетворяющих условиям $\|x' - x\| < \delta$ и $t > \gamma$, где $(F(t, x))^\epsilon$ — ϵ -окрестность множества $F(t, x)$.

При сделанных предположениях задача Коши (2) для любых начальных данных имеет локальное решение и любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток $[t_0, +\infty)$; $F'(t, x)$ — непустое, выпуклое и компактное множество для любой точки (t, x) , а многозначное отображение $F'(t, x)$ удовлетворяет условиям А1–А3.

Будем говорить, что множество $D \subset R^n$ квазиинвариантно относительно включения (2), если для любой точки $y_0 \in D$ существует решение $y(t)$ включения (3) с некоторым отображением $F'(t, x)$ в правой части, такое, что $y(0) = y_0$ и $y(t) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Через $\Lambda^+(x)$ обозначается ω -предельное множество решения $x(t)$ включения (2).

Теорема 1. Если выполняются условия А1–А3, то для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (2) множество $\Lambda^+(x)$ квазиинвариантно.

Для непрерывно дифференцируемой функции $V : R^{1+n} \rightarrow R^1$ положим

$$\dot{V}^+(t, x) = \sup_{u \in F(t, x)} (V_t + \langle \nabla V, u \rangle),$$

где V_t — производная функции $V(t, x)$ по переменной t , ∇V — градиент функции $V(t, x)$ по переменной x , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения.

Через $w(t, x) \geq 0$ будем обозначать измеримую по t при любом x , непрерывную по x при почти всех t и ограниченную на каждом множестве $(\gamma, +\infty) \times K$ функцию, где $K \subset R^n$ — компактное множество. Будем предполагать также выполненным условие $\lim_{x' \rightarrow x, t \rightarrow +\infty} |w(t, x') - w(t, x)| = 0$. (Это условие выполняется, если функция $w(t, x)$ непрерывна в каждой точке x равномерно относительно t .) При этих предположениях существуют предельное для функции $w(t, x)$ относительно любой последовательности $\{t_k\}$ (в общем случае многозначное) отображение $w'(t, x)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия А1–А3, функция $V(t, x)$ ограничена снизу на любом множестве $(\gamma, +\infty) \times K$, где $K \subset R^n$ — компактное множество, и выполняется неравенство

$$\dot{V}^+(t, x) \leq -w(t, x).$$

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (2) и для любых $y_0 \in \Lambda^+(x)$ и $T > 0$ существуют предельные относительно одной и той же последовательности $\{t_k\}$ отображения $F'(t, x)$, $w'(t, x)$ и решение $y(t)$ включения (3) с начальным условием $y(0) = y_0$, такое, что для п.в. $t \in [0, T]$ выполняется равенство $w'(t, y(t)) = 0$.

Предлагаемый подход в равной степени может применяться для дифференциальных уравнений и при соответствующих предположениях приводит к известным результатам.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00287), Программы фундаментальных исследований № 17 Президиума РАН, СО РАН (междисциплинарный проект № 80) и ФЦП Министерства образования и науки РФ (проект № 2012-1.2.1-12-000-1001-011).

Список литературы

1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
2. Рун Н., Абетс М., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К УПРАВЛЕНИЮ НЕУПРАВЛЯЕМЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Е. Хартовский

ГрГУ им. Я.Купалы, факультет инновационных технологий машиностроения
Ожешко 22, 230020 Гродно, Беларусь
hartovskij@grsu.by

Предположим, что динамика некоторого объекта описывается линейной автономной системой

$$S(p)x(t) = \sum_{i=0}^m B_i u(t - ih), t \geq 0, \quad (1)$$

где $S(p)$ – некоторая аналитическая $n \times n$ -матрица, $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования, B_i , $i = \overline{0, m}$ – постоянные $n \times n$ -матрицы, $x(t)$, $t \geq 0$ – решение системы (1), $u(t)$, $t \geq 0$ управляющее воздействие. Считаем, что для системы (1) задано начальное состояние, которое зависит от матрицы $S(p)$ и однозначно определяет решение системы (1) (при заданном $u(t)$, $t \geq 0$).

Предположим, что система (1) не обладает некоторым свойством управляемости (например, полной управляемости, модальной управляемости, приводимости). В докладе представлен один из возможных