с параметрами $v \in W$, $\chi \in \mathcal{X}_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ и множеством функций варьирования

$$\mathcal{X}_\alpha = \left\{ \chi \in L_\infty(T) : \chi(t) = 0 \vee 1, \int\limits_T \chi(t)\,dt = \alpha\,(t_1 - t_0) \right\}.$$

Вспомогательная задача улучшения с параметром α представляется в виде (система интегральных уравнений относительно v, χ с дополнительными условиями)

$$\int\limits_T \chi(t)\Delta_{v(t)} H^i[t,u]\,dt = \alpha\Phi_i(u),\ i \in I(u),\ v \in W,\ \chi \in \mathcal{X}_\alpha.$$

Решение этой задачи естественно проводить на основе метода наименьших квадратов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11–01–00713).

Список литературы

1. *Демьянов В. Ф., Виноградова Т. К., Никулина В. Н. и др.* Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.
2. *Федоров В. В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
3. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
4. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
5. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

МЕТОДЫ ПОЗИЦИОННОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Н.Н. Субботина, Т.Б. Токманцев

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

С. Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия

{nnsubbotina, tokmancev}@mail.ru

Введение. Среди фундаментальных исследований динамических систем [1], [2], [3] важное место занимают задачи реконструкции динамики [4] по результатам статистики её измерений. При этом ключевую роль играет анализ и оценка совместимости модели и статистики. Предлагается подход к решению обратных задач динамики, базирующийся на решении задач позиционного оптимального управления [5] с функционалом невязки интегрального типа.

Обратная задача динамики. Рассматривается управляемая система
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t)) + f(t, x(t))u(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$
где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, управление $u \in \mathbb{R}^n$ стеснено ограничениями
$$u \in U = \{u_i \in [a_i^-, a_i^+], \quad a_i^- < a_i^+, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Предполагается, что задана непрерывная функция $y(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ — история замеров фазовой переменной системы, причем известно, что точное движение $x_*(t)$ содержится в полосе достоверности замеров Ω_δ
$$(t, x_*(t)) \in \Omega_\delta = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n : \ ||x - y(t)|| \leq \delta\}, \tag{3}$$
где параметр погрешности измерений $\delta > 0$, а символ $||z||$ означает евклидову норму конечномерного вектора z.

Обратная δ-задача динамики состоит в построении управления $u^\delta(\cdot)$ и порожденной им траектории $x^\delta(\cdot)$ системы (1), (2), которая удовлетворяет условию (3) и условию
$$\max_{t \in [0,T]} ||x^\delta(t) - x_*(t)|| \to 0, \qquad \text{при} \qquad \delta \to 0. \tag{4}$$

Решение обратной задачи. Для решения обратной δ-задачи динамики вводится вспомогательная задача оптимального позиционного управления системой (1), (2) на минимум функционала невязки:
$$I_{t_0,x_0}(u(\cdot)) = \int_0^T \left[\frac{(x(t) - y(t))^2}{2} + \frac{\alpha}{2}||u(t)||^2\right] dt \to \min_{u(\cdot) \in \mathbf{U}[t_0,T]}. \tag{5}$$
Здесь $\alpha > 0$ – малый регуляризирующий параметр, $(t_0, x_0) \in \Omega_\delta$, $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ – траектория системы (1), стартующая из точки $x(t_0) = x_0$ и порожденная измеримым управлением $u(\cdot) : [t_0, T] \to U$, множество $\mathbf{U}[t_0, T]$ состоит из всевозможных измеримых управлений $u(\cdot) : [t_0, T] \to U$.

Предлагается конструкция позиционного управления (оптимального синтеза) [6], разрешающего задачу (1), (2), (5) для всех $(t_0, x_0) \in \Omega_\delta$.

Выделяются траектории $x^\delta(t) = x(t; 0, x_0^\delta, u^\delta(\cdot))$, порожденные оптимальным позиционным управлением (оптимальным синтезом), проходящие в полосе достоверности замеров (3) и удовлетворяющие условию

$$\min_{(0,x_0)\in\Omega_\delta}\ \min_{u(\cdot)\in\mathbf{U}[0,T]} I_{0,x_0}(u(\cdot)) = I_{0,x_0^\delta}(u^\delta(\cdot)). \tag{6}$$

Доказано, что выделенные траектории $x^\delta(t) = x(t;0,x_0^\delta,u^\delta(\cdot))$ являются решением обратной δ-задачи динамики, т.е. для них выполняется условие (4), а порождающие их управления сходятся в пространстве L_2 к управлению $u_*(\cdot)$, порождающему исходную траекторию $x_*(\cdot)$ и имеющему при этом минимальную норму в L_2.

Разработаны численные методы решения обратной δ-задачи динамики. Получены условия согласования параметров аппроксимации δ и α, а также оценки сходимости аппроксимации траекторий $x^\delta(\cdot)$ к траектории $x_*(\cdot)$ в $C[0,T]$ и управлений $u^\delta(\cdot)$ к управлению $u_*(\cdot)$ в $L_2[0,T]$, при $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$.

Пример. В качестве иллюстративного примера рассмотрена задача реконструкции модели макроэкономики, предложенной Э.Г. Альбрехтом [7]. Приведены результаты анализа и численного решения обратной задачи динамики для этой модели при известной дискретной статистике показателей макроэкономики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00214) и Программы Президиума РАН "Математическая теория управления", а также Программы Правительства РФ по поддержке ведущих научных школ (грант НШ-64508.2010.1).

Список литературы

1. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
2. *Кириллова Ф. М., Габасов Р. Ф.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
3. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределённости. М.: Наука, 1977.
4. *Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
6. *Субботина Н. Н., Колпакова Е. А., Токманцев Т. Б., Шагалова Л. Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013.
7. *Альбрехт Э. Г.* Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России». 2002. Т. 5. С. 54-86.