2. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // Прикл. матем. механ. 1965. Т. 29. № 2. С. 226–245.
3. *Cherevko I., Piddubna L.* Approximation of differential difference equations and calculation of nonasymptotic roots of quasipolynomials // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. 1999. V.29. N 1. P. 15–21.
4. *Матвий О.В., Черевко И.М.* Об аппроксимации систем с запаздыванием и их устойчивость // Нелинейные колебания. 2004. Т. 7. № 2. С. 208–216.
5. *Черевко И.М., Матвий О.В.* Исследование схем аппроксимации дифференциально-разностных уравнений // Math. Analysis, Differential equations and Applications. Sofia, 2011. P. 301–312.
6. *Вагина М.Ю., Кипнис М.М.* Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Мат. заметки. 2003. Т. 74. Вып. 5. С. 786–789.
7. *Клевчук И.И., Пернай С.А., Черевко И.М.* Построение областей устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений // Докл. НАН Украины. 2012. № 7. С. 28–34.
8. *Матвий О.В., Пернай С.А., Черевко И.М.* Об устойчивости линейных систем с запаздыванием // Научн. вестник Черновицкого ун-та. 2008. Вып. 421. С. 66–70.

ПРЯМОЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.С. Половинкин

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия
polovinkin@mail.mipt.ru

Введение. В докладе развивается метод касательных конусов ко множеству решений дифференциального включения для решения оптимизационных задач с дифференциальными включениями из $\mathbb{R}^n$ (см. [1]) на случай дифференциальных включений из сепарабельных банаховых пространств.

1. Основные понятия. Обозначим через E и E_1, E_2 сепарабельные банаховы пространства, через $\mathcal{P}(E)$ ($\mathcal{F}(E)$) — множество всех непустых (замкнутых) подмножеств из банахова пространства E. Для невыпуклых множеств из E широко известны (см. [2, 3, 4]) *нижний касательный конус* $T_H(A;a)$, *верхний касательный конус (иначе: контингентный конус* $T_B(A;a)$, и *касательный конус Кларка* $T_C(A;a)$. Также, используя понятие разности Минковского $A \overset{*}{-} B \doteq \{x \in E \mid$

$x + B \subset A\}$ и следуя работам [5, 3], можно получить другие касательные конусы. Например, это – асимптотический нижний касательный конус $T_{AH}(A;a) \doteq T_H(A;a) \overset{*}{-} T_H(A;a)$ и асимптотический верхний касательный конус $T_{AB}(A;a) \doteq \overline{T_{AH}(A;a) + T_B(A;a) \overset{*}{-} T_B(A;a)}$. Всякий конус $T_L(A;a)$ при $L \in \{AH, AB\}$ выпукл, замкнут, и справедливы включения $T_C(A;a) \subset T_{AH}(A;a) \subset T_{AB}(A;a) \subset T_B(A;a)$.

Определение 1. *[2, 5] L-производной, где $L \in \{H, B, C, AH, AB\}$, отображения $F\colon E_1 \to \mathcal{P}(E_2)$ в точке $z_0 \in \overline{\mathrm{graph} F} \subset Z \doteq E_1 \times E_2$ называется многозначное отображение $D_L F(z_0) : E_1 \to \mathcal{P}(E_2)$, определяемое по формуле*

$$D_L F(z_0)(u) \doteq \{v \in E_2 \mid (u, v) \in T_L(\mathrm{graph} F; z_0)\}, \quad u \in E_1.$$

2. Дифференциальные включения. Пусть $T \doteq [t_0, t_1]$ – отрезок, пусть $B_r(a)$ ($\overline{B_r(a)}$) – открытый (замкнутый) шар в E радиуса $r > 0$ с центром в точке a. Пусть $AC(T, E)$ – банахово пространство абсолютно непрерывных функций $f\colon T \to E$. Пусть $C_0 \subset E$ и $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad x(t_0) \in C_0, \quad t \in T. \tag{1}$$

Множество всех решений $x(\cdot) \in AC(T, E)$ включения (1) на отрезке T обозначим через $\mathcal{R}_T(F, C_0)$. Зафиксируем решение $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$.

Определение 2. *Отображение $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ называется измеримо-псевдо-липшицевым в окрестности решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \widehat{x}_0)$, если существуют число $\delta > 0$, функции $l(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^1_+)$ и $\eta(t) \doteq (l(t) + 1)\delta$, $t \in T$, а также замкнутая область $W \supset \{(t, x) \in T \times E \mid \|x - \widehat{x}(t)\| \le \delta,\ t \in T\}$ такие, что выполнены три условия:*

1) не пусты множества

$$G(t, x) \doteq F(t, x) \cap (\widehat{x}'(t) + \eta(t) B_1(0)), \quad \forall (t, x) \in W,$$

2) для любой функции $v(\cdot) \in C(T, E)$, у которой $\mathrm{graph}\, v \subset W$, отображение $t \to G(t, v(t))$ измеримо,

3) для любых точек (t, x_1), $(t, x_2) \in W$ справедливы включения

$$G(t, x_1) \subset F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\| \overline{B_1(0)}. \tag{2}$$

Следуя определению 1, сравним L-производную правой части включения (1) и L-производную отображение $x \to \mathcal{R}_T(F, x)$. Для этого при каждом $t \in T$ обозначим $L-$ производные отображения $x \to F_t(x) \doteq F(t, x)$ в точке $(\widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))$ в виде $F'_L(t, u) \doteq D_L F_t(\widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))(u)$.

Пусть $\mathcal{R}_T(F'_L, u_0)$ – множество решений включения $u'(t) \in F'_L(t, u(t))$ с $u(t_0) = u_0$. Также обозначим нижнюю производную отображения $\mathcal{R}_T(F, \cdot): \quad E \to \mathcal{P}(AC(T, E))$ в точке $(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(\cdot))$:

$$D_H^{AC}(u) \doteq \liminf_{\lambda \to 0} (\limsup_{x \to u} \lambda^{-1}(\mathcal{R}(F, \widehat{x}(t_0) + \lambda x) - \widehat{x}(\cdot))), \quad u \in E,$$

где топологические пределы множеств понимаются в метрике пространства $AC(T, E)$.

Теорема 1. *Пусть отображение $F : T \times E \to \mathcal{F}(E)$ измеримо-псевдо-липшицево в окрестности решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$. Тогда для любого $u_0 \in E$ и любого решения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F'_H, u_0)$, у которого $u'(\cdot) \in L_\infty(T, E)$, справедливо включение $u(\cdot) \in D_H^{AC}(u_0)$.*

Теорема 2. *[6] Пусть K_0 — замкнутый выпуклый конус в E. Пусть $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ таково, что $F(t, x) \doteq \{y \in E \mid (x, y) \in K(t)\}$, где $K(t)$ — замкнутый выпуклый конус в $E \times E$, измеримо зависящий от $t \in T$. Пусть существует функция $\gamma(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^1_+)$ такая, что $\|F(t, \cdot)\| \le \gamma(t)$, $t \in T$. Тогда полярный конус $(\mathcal{R}_T(F, K_0))^0$ состоит из пар точек $b^* \in E^*$ и функций $y^*(\cdot) \in L_\infty(T, E^*)$ таких, что для каждой такой пары найдётся функция $x^*(\cdot) \in L_1(T, E^*)$, для которой:*

$$b^* - \int_{t_0}^{t_1} x^*(s)\, ds \in K_0^0; \quad \left(x^*(t), y^*(t) - \int_{t}^{t_1} x^*(s)\, ds\right) \in K^0(t), \quad \dot{\forall} t \in T,$$

где K_0^0 и $K^0(t)$ -полярные конусы в E^* и $E^* \times E^*$ к конусам K_0 и $K(t)$.

3. Задача оптимизации. Необходимые условия. Пусть $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^1$ - локально липшицева, множество $C_0 \subset E$ замкнуто. На отрезке $T \doteq [t_0, t_1]$ рассмотрим задачу (см.[1]):

$$\text{Minimize}\, \{\varphi(x(t_1)) \mid x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)\}. \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ - локальное в $AC(T, E)$ решение задачи (3), и $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ измеримо-псевдо-липшицево в окрестности этого решения. Пусть замкнутый выпуклый конус $K(t) \subset E \times E$ измеримо зависит от $t \in T$ и*

$$K(t) \subset T_H(\operatorname{graph} F(t, \cdot); (\widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))) \quad \forall t \in T.$$

Тогда существует функция $p(\cdot) \in AC(T, E^*)$ такая, что

$$p(t_0) \in T^0_{AH}(C_0, \widehat{x}(t_0)),\ p(t_1) \in -\partial^+_{AB}\varphi(\widehat{x}(t_1)),\ (p'(t), p(t)) \in K^0(t),$$
$$\forall t \in [t_0, t_1].$$

Замечание 1. *Любой из конусов* $T_L(\operatorname{graph} F(t,\cdot); (\widehat{x}(t), \widehat{x}'(t)))$ *при* $L \in \{C, AH\}$ *является примером такого конуса* $K(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009 - 2013 годы и РФФИ, проект № 13-01-00295-а.

Список литературы

1. *Polovinkin E.S.* Necessary Conditions for Optimization Problems with Differential Inclusion.// Set-valued Analysis and Differential Inclusions. Progress in Systems and Control Theory. Birkhäuser. 1993. Vol. 16. P. 157–170.
2. *Aubin J.P.* Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions // Advances in Math. Suppl. Studies, 1981, Acad. Press, C. 160–272.
3. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007.
4. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ.// М.: Наука, 1988.
5. *Половинкин Е.С.* Теория многозначных отображений. М.: Изд-во МФТИ, 1983.
6. *Половинкин Е. С.* О вычислении полярного конуса ко множеству решений дифференциального включения // Труды МИАН, т. 278, 2012.— С. 178–187.

СВОЙСТВА ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ НА ВЫПУКЛОМ КОНУСЕ

Л.Н. Полякова

Санкт-Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики-процессов управления
Университетский пр., 35, Старый Петергоф, 198504 Санкт-Петербург, Россия
lnpol07@mail.ru

Введение. Понятие опорной функции выпуклого множества является одним из ключевых в выпуклом анализе. Оно было введено в конце XIX в. немецким математиком Г. Минковским.

Определение 1. *Функция* $s(g, X) = \sup\limits_{x \in X} \langle x, g \rangle, \quad g \in \mathbb{R}^n$, *где множество* $X \subset \mathbb{R}^n$ *непусто и выпукло, называется опорной функцией этого множества.*

Здесь символ $\langle *, * \rangle$ обозначает скалярное произведение двух векторов. Опорные функции в выпуклом анализе широко используются. Как известно [1, 2], замкнутое выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ полностью определяется своей опорной функцией. Опорная функция непустого выпуклого компакта положительно однородна и субаддитивна, поэтому