

$$= \int_{\omega_1(x_{-j})}^{\omega_m(x_{-j})} \varphi \left(\frac{\partial f(x_j, x_{-j})}{\partial x_j} \right) \left\| \frac{\partial f(x_j, x_{-j})}{\partial x_j} \right\| dx_j, j = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть $X \subset R^n$ - выпуклый компакт, $\text{int}X \neq \emptyset$ и отображение $f : X \rightarrow R^m$ непрерывно дифференцируемо, компоненты $f_i : X \rightarrow R, i = 1, 2, \dots, m$ которого строго вогнуты на X . Тогда множество $P(X)$ парето-оптимальных решений задачи (1) непусто и координаты таких $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ решений определяются из системы интегральных равенств (7).

Замечание 1. Из свойств функций φ и вогнутости отображения $f : X \rightarrow R^m$ следует эквивалентность систем интегральных равенств (6) и (7).

Список литературы

1. В. Майсурадзе Об одном аналитическом методе нахождения решения многокритериальных задач. Труды института систем управления им. А.И. Элиашвили Академии Наук Грузии. Тбилиси, №12, 2008.
2. И. Экланд, Р. Темам Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
3. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
4. Лоран Шварц. Анализ. Том 1. М.: Мир, 1972.
5. Ж.-П.Обен Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988.

УСТОЙЧИВОСТЬ, СТАБИЛИЗАЦИЯ, ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ГИБРИДНЫХ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

В.М. Марченко, И.М. Борковская, О.Н. Пыжкова

Белорусский государственный технологический университет

Свердлова 13а, 220006 Минск, Беларусь

vmar@bstu.unibel.by, borkovskaia@gmail.com, olga.pyzhcova@gmail.com

Исследование реальных физических процессов в современных задачах автоматики и телемеханики, теории передачи информации, радиологии и химической кинетики, моделирования технологических процессов в ядерных реакторах, плазме и лазерах, задачах демографии и экономики предъявляют все более возрастающие требования к математическим моделям реальных систем автоматического регулирования, диктуют необходимость изучения фундаментальных проблем математической теории управления, ставят новые задачи для более широкого класса динамических систем. Появляется потребность в разработке

новых более эффективных методов изучения таких систем, в частности, динамических систем с алгебраическими связями и дискретно-непрерывных систем, описывающих процессы, в которых как эффектом дискретности, так и алгебраическими связями пренебречь нельзя. Большинство из перечисленных процессов приводят к математическим моделям в виде гибридных систем.

Рассмотрим объект управления, описываемый следующей дискретно-непрерывной системой:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh, (k+1)h) \quad (1)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

где $x(t) \in R^n, y(kh) \in R^m, u(kh) \in R^r, h > 0, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B$ - постоянные матрицы соответствующих размеров. Начальные условия зададим в виде

$$x(0) = x(+0) = x_0, y(0) = y_0. \quad (3)$$

Рассмотрим линейную обратную связь вида

$$u(kh) = Q_1x(kh) + Q_2y(kh), k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где Q_1 и Q_2 - постоянные матрицы размеров $r \times n$ и $r \times m$ соответственно.

Предлагается подход к изучению устойчивости и стабилизации, основанный на использовании дискретных систем, что позволяет получить эффективные критерии устойчивости и стабилизации [1].

Полагая $z(k) = \begin{bmatrix} x(kh) \\ y(kh) \end{bmatrix}, u(kh) = 0$, приходим к дискретной системе

$$z[k+1] = \Sigma_h z(k), k = 0, 1, \dots, \Sigma_h = \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)} d\tau A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Теорема 1. Система (1), (2) с $B = 0$ является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы Σ_h из (5) находятся внутри единичного круга (с центром в начале координат) на комплексной плоскости, что эквивалентно условию $\rho(\Sigma_h) < 1$ ($\rho(A)$ - спектральный радиус матрицы A).

Теорема 2. Система (1), (2) с $B = 0$ является экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда она асимптотически устойчива.

Теорема 3. Система (1), (2) с $B = 0$ устойчива тогда и только тогда, когда $\rho(\Sigma_h) \leq 1$, причем всем собственным числам матрицы Σ_h , по модулю равным 1, соответствуют простые элементарные делители, т.е. таким собственным значениям отвечают жордановы клетки размерности 1.

Рассматривается также проблема стабилизации системы (1), (2) дискретным регулятором (4). Замкнутая система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh, (k+1)h), \\ y(kh+h) &= (A_{21} + BQ_1)x(kh) + (A_{22} + BQ_2)y(kh).\end{aligned}$$

Теорема 4. Система (1), (2) стабилизируема дискретным регулятором (4) тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}[\lambda I_{n+m} - \Sigma_h, \Delta] = n + m$$

для всех комплексных чисел λ таких, что $|\lambda| \geq 1$, ($\Delta = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$).

Получены параметрические критерии относительной t_1 -управляемости системы (1), (2) [2].

Задача относительной управляемости системы (1), (2) сводится к задаче полной управляемости (в смысле Калмана) дискретной системы

$$z[k+1] = \Sigma_h z(k) + \Delta u(kh), k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Теорема 5. Условие

$$\text{rank}[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta] = \text{rank}[\Delta, \Sigma_h \Delta, \dots, (\Sigma_h)^{q-1} \Delta]$$

является необходимым и достаточным для qh -относительной управляемости системы (1), (2).

Получены также параметрические критерии относительной t_1 -достижимости системы (1), (2).

Список литературы

1. Марченко В.М., Борковская И.М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем. // Труды БГТУ. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. 2012. С. 7–10.
2. Марченко В.М., Пыжкова О.Н. Относительная достижимость линейных стационарных систем, управляемых дискретным регулятором. // Труды БГТУ. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. 2012. С. 11–13.