«репеллерной» неподвижной точкой, делящей фазовое пространство Ω на два подмножества. Тривиальное равновесие итерируемой зависимости устойчиво, соответственно имеет область притяжения Ω_0.

Дальнейшее развитие подхода с точки зрения теории этапности развития организмов привело к созданию непрерывно-дискретных моделей в виде системы ОДУ с изменяемой правой частью, алгоритмически представленных в форме гибридного автомата [2]. Была получена неунимодальная определенная численным решением зависимость и дискретная динамическая система характеризующаяся возникновением переходного хаотического режима. Хаотический режим связан со сложной структурой границы областей притяжения единственного устойчивого стационарного состояния и тривиального равновесия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 13-07-00925.

Список литературы

1. *Ricker W.* Stock and recruitment // J. of the Fisheries research board of Canada. 1954. Vol. 11. N 5. P. 559–623.
2. *Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б.* Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. СПб.: БХВ, 2006. 224 с.

СХЕМА КРАНКА-НИКОЛСОН ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Г. Пименов

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина, Институт математики и компьютерных наук

Ленина 51, 620000 Екатеринбург, Россия

Vladimir.Pimenov@usu.ru

Введение. Математические модели самых различных объектов могут содержать одновременно два эффекта: распределенность по состоянию и запаздывание по времени [1]. Примером может служить однородное уравнение теплопроводности с наличием временного постоянного сосредоточенного запаздывания в производной по состоянию [2]. Если рассматривать управление таким объектом по принципу обратной связи, то порождаемая управлением неоднородность будет иметь функциональный эффект наследственности по состоянию, например, распределенное запаздывание, этот факт отмечался уже в первых работах по теории управления системами с последействием [3]. В силу сложности объекта – нелинейного уравнения в частных производных с функциональным эффектом наследственности, на первый план выходят эффективные численные методы. В работе строится аналог неявного метода Кранка-Никольсон для моделирования управляемого объекта, указываются условия его устойчивости и порядок сходимости.

1. Постановка задачи и описание алгоритма. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t-\tau) + v. \tag{1}$$

Здесь $u(x,t)$ — искомая функция, $x \in [0,X]$, $t \in [0,T]$, τ — величина запаздывания, управление v строится по известному закону $v = f(x,t,u(x,t),u_t(x,\cdot))$, где $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), -\tau \leqslant s < 0\}$ — функция предыстория искомой функции к моменту t.

Заданы начальные условия: $u(x,t) = \varphi(x,t),\ x \in [0,X],\ t \in [-\tau,0]$, и граничные условия: $u(0,t) = 0,\ u(X,t) = 0,\ t \in [0,T]$.

Будем предполагать, что функционал f и функция φ таковы, что задача имеет единственное решение. Считаем также, что $0 < b^2 < a^2$.

Проведем дискретизацию задачи. Пусть $h = X/N$, введем $x_i = ih$, $i = 0,\ldots,N$, пусть $\Delta = T/M$, $t_j = j\Delta$, $j = 0,\ldots,M$. $\tau/\Delta = K$ — целое.

Приближения функции $u(x,t)$ в узлах сетки (x_i,t_j) будем обозначать u^i_j. Для каждого фиксированного $i = 0\ldots N$ введем дискретную предысторию по временным узлам t_j, $j = 0\ldots M$: $\{u_k\}^i_j = \{u^i_k, j-K \le k \le j\}$. Оператором интерполяции с экстраполяцией I назовем отображение $I:\ \{u_k\}^i_j \to w(x_i,t),\ t \in [t_j-\tau, t_j+\Delta/2]$. В дальнейшем рассматриваем только кусочно-линейную интерполяцию $w(x_i,t) = \frac{1}{\Delta}(u_{k-1}(t_k-t)+u_k(t-t_{k-1})),\ t \in [t_{k-1},t_k]$, с экстраполяцией продолжением $w(x_i,t) = \frac{1}{\Delta}(u_{j-1}(t_j-t)+u_j(t-t_{j-1})),\ t \in [t_j,t_j+\Delta/2]$.

Рассмотрим неявный метод, являющийся аналогом метода Кранка-Никольсон

$$\frac{u^i_{j+1}-u^i_j}{\Delta} = a^2\Big(\frac{u^{i-1}_j - 2u^i_j + u^{i+1}_j}{2h^2} + \frac{u^{i-1}_{j+1} - 2u^i_{j+1} + u^{i+1}_{j+1}}{2h^2}\Big)+ \tag{2}$$

$$+b^2\Big(\frac{u^{i-1}_{j-K} - 2u^i_{j-K} + u^{i+1}_{j-K}}{2h^2} + \frac{u^{i-1}_{j+1-K} - 2u^i_{j+1-K} + u^{i+1}_{j+1-K}}{2h^2}\Big)+$$

$$+f(x_i, t_j+\Delta/2, w(x_i,t_j+\Delta/2), w_{t_j+\Delta/2}(x_i,\cdot)).$$

Метод дополняется соответствующими начальными и краевыми условиями. Из этой системы трехдиагональной структуры можно найти u^i_{j+1}.

2. Сходимость метода. Обозначим величину погрешности через $\varepsilon^i_j = u(x_i, t_j) - u^i_j$.

Определение 1. *Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует такая константа C что выполняется неравенство: $|\varepsilon^i_j| \leqslant C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 1, \ldots, N-1$ и $j = 1, \ldots, M$.*

Сведем метод к общей схеме численного решения функционально-дифференциальных уравнений. Введем послойный вектор $\tilde{U}_j = (u^1_j, u^2_j, \cdots, u^{N-1}_j)$, тогда (2) записывается в виде

$$A\tilde{U}_{j+1} = B\tilde{U}_j + C\tilde{U}_{j-K} + \Delta\tilde{F}_j,$$

или, в силу обратимости оператора A, с помощью явной пошаговой формулы

$$\tilde{U}_{j+1} = A^{-1}B\tilde{U}_j + A^{-1}C\tilde{U}_{j-K} + \Delta A^{-1}\tilde{F}_j, \qquad (3)$$

Введем вектор $U_j = (\tilde{U}_j, \tilde{U}_{j-1}, \cdots, \tilde{U}_{j-K})$ размерности $(N-1)\times(K+1)$, тогда пошаговая формула может быть записана в виде

$$U_{j+1} = SU_j + \Delta F_j, \qquad (4)$$

где S — матрица соответствующей размерности, а F_j — векторный функционал, определенный на результате кусочно-линейной интерполяции предыстории и зависящий от исходного способа управления. Для схемы (4) можно использовать методы определения порядка сходимости [5], состоящие в исследовании порядка локальной погрешности (невязки), порядка интерполяции и свойств устойчивости.

В работе [4] с помощью спектрального анализа изучены условия устойчивости (ограниченности соответствующей нормы матрицы S единицей) и порядка сходимости однородной разностной схемы, соответствующей (4). В отличие от уравнения без запаздывания, эти условия зависят от соотношения шагов h и Δ. Пусть, например, выполняется

$$h = \rho\Delta, \qquad (5)$$

где $0 \neq \rho$ – фиксированная константа.

Методами, подобными [5, 6], доказывается утверждение.

Теорема 1. *Пусть точное решение $u(x,t)$ пять раз непрерывно дифференцируемо по совокупности переменных, выполняется условие* (5), *тогда метод* (2) *сходится с порядком $\Delta + h$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 13-01-00089 и программы АВЦП 1.994.2011 «Устойчивые вычислительные методы анализа динамики сложных систем».

Список литературы

1. *Wu J.* Theory and Application of Partial Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1996.
2. *Reyes E., Rodriguez F., Martin J.A.* Anlytic-numerical solutions of diffusion mathematical models with delay // Comput.Math.Appl. 2008. V. 56. P. 743–753.
3. *Красовский Н.Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени // ПММ. 1962. Т. 26. №1. С. 37–51.
4. *Garcia P., Castro M.A., Martin J.A., Sirvent A.* Convergence of two implicit numerical schemes for diffusion mathematical models with delay // Mathematical and Computer Modelling. 2010. V. 52. P. 1279–1287.
5. *Пименов В.Г.* Общие линейные методы численного решения дифференциально-функциональных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 1. С. 105–114.
6. *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 178–189.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ СЕМЕЙСТВ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Д.И. Пирштук

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики

пр. Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

dzianis.pirshtuk@yandex.by

Введение. Основной целью работы является вычисление ряда локальных инвариантов, характеризующих аффинные по управлению динамические системы ([1]), т.е.

$$\dot{x} = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) f_i(x_i(t)), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $f_0, f_1, \ldots, f_n$ – векторные поля, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – управляющие параметры. Векторное поле при этом принято f_0 называть *дрифтом* (или *течением*) системы (1).

Определение 1. *Пусть* $\mathcal{A}_U(t)$ *– множество точек, достижимых из исходной точки* $x(0)$ *системы* (1) *за время* $t > 0$. *Систему* (1) *назовем локально управляемой за малое время ([3]), если исходная точка лежит внутри* $\mathcal{A}_U(t)$ *для всех* $t > 0$.