

пример, установочного угла лопасти), обеспечивающих устойчивость оси симметрии тела на режиме авторотации.

Для задач 1, 2 коэффициенты указанного уравнения совпадают, а для задачи 3 их зависимость от установочного угла другая. Поэтому области изменения установочного угла, обеспечивающие устойчивость оси симметрии тела, в задачах 1, 2 и задаче 3 разные.

При увеличении массы тела, движущегося под действием силы тяги в невозмущенной атмосфере, область устойчивости, отвечающая малым установочным углам, уменьшается, и для тел с достаточно большой массой область устойчивости практически совпадает с областью устойчивости тела, вращающегося в потоке аэродинамической трубы.

Исследуется поведение тела в трех рассматриваемых задачах в случае больших начальных отклонений оси симметрии от ее положения в режиме авторотации.

Показывается, что поведение макета тела в аэродинамической трубе сопоставимо с движением тела большой массы, находящегося под действием силы тяги, направленной вдоль оси его динамической симметрии в невозмущенной атмосфере.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-08-00444, № 12-01-00364).

Список литературы

1. Привалов В.А., Самсонов В.А. Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 32–38.
2. Привалова О.Г., Окунев Ю.М., Самсонов В.А. Об устойчивости движения осесимметричного оперенного тела в сопротивляющейся среде // Вестник НГУ. 2011. № 4. (2). С. 287–289.

РАЗРАБОТКА БИСТАБИЛЬНОЙ ГИБРИДНОЙ МОДЕЛИ ВОСПРОИЗВОДСТВА ВОДНЫХ БИРЕСУРСОВ

А.Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
14 линия, 199178 Санкт-Петербург, Россия
madelf@pisem.net

Введение. В докладе рассказывается о свойствах новой модели, предназначенной для описания эффективности воспроизводства популяций рыб в рамках теории формирования пополнения. В сравнении с известными ранее моделями данного вида описываются новые

возможности и показываются противоречия, возникающие при попытках биологической интерпретаций динамики двух применявшихся в промысловой ихтиологии дискретных моделей с бифуркациями удвоения периода. Актуальность исследования свойств обусловлена возникновением нелинейных эффектов, требующих объяснения в терминах предметной области. Предлагаемый подход к моделированию процесса воспроизводства формализует изменения выживаемости на ранних стадиях развития организмов. С использованием формализма гибридного автомата разработан метод исследования влияния смены эколого-физиологических стадий развития молоди на характер кривой воспроизводства. Полученные вычислительные модели анализируются в инструментальной среде как непрерывно-дискретные динамические системы.

1. Описание модели. Концепция о роли зависимости между запасом и пополнением промысловых запасов рыб $R = \psi(S)$, количеством особей, доживших до определенного момента жизненного цикла, описана в классической работе [1]. Зависимость $R = aSe^{-bS}$ позволяет описывать наблюдаемое снижение численности пополнения при увеличении численности запаса, в этом случае повышенная плотность популяции становится негативным фактором, увеличивающим смертность. Модель Рикера по нашему мнению имеет два критически важных свойства, ограничивающих её применение.

Первый недостаток состоит в максимальном наклоне касательной к кривой в начале координат. Данное свойство не соответствует сведениям о деградирующих популяциях, эффективность воспроизводства которых уменьшается. Существует представление о необходимой для выживаемости численности популяции из-за «эффекта Олли», когда выживаемость молодняка в сообществе с оптимальной численностью повышается. У мигрирующих анадромных рыб при низкой численности снижается вероятность встреч в местах пригодных для нереста.

Второй недостаток: $\lim_{S \rightarrow \infty} aSe^{-bS} = 0$, тогда как эксперименты в аквариумах показывают уменьшение выживших до некоторой постоянной величины.

Заметим, что оценка адекватности сценария Фейгенбаума для двух биологических моделей Рикера и Шепарда неоднозначна из-за противоречивой интерпретации увеличения бифуркационного параметра.

Разрабатываемая новая зависимость должна отвечать условию $\exists! R_m : \psi'(R_m) = 0, \psi''(R_m) < 0; \exists R_u : \psi''(R_u) = 0, R_u < R_m$.

Перейдем к непрерывной записи модели как решения задачи Коши

на $t \in [0, \tau]$:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha N(0) + \beta)N(t), \quad (1)$$

Константы заданного на промежутке времени ОДУ соотносятся с константами формулы Рикера: $a = \lambda \exp(-\beta\tau)$, $b = \alpha\tau$, λ – средняя плодовитость особей популяции, определяющая начальные условия $N(0) = \lambda S$. Создание новых моделей предпринято после изучения данных об искусственном и естественном воспроизводстве осетровых рыб Каспия для задачи выяснения диапазона устойчивости популяции к интенсивному промыслу. Нами разработана модель на основе формализации эффекта резкого снижения эффективности воспроизводства при деградации и влияние роста особей на темп убыли численности поколения:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta) N(t) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k + \zeta}, \theta(S) = \frac{1}{1 - \exp(-cS)}, \end{cases} \quad (2)$$

где S – величина нерестового запаса; $w(t)$ – отражает уровень размерного развития поколения; g – параметр, учитывающий ограниченность количества доступных кормовых объектов; убывающая функция $\theta(S) \rightarrow 1$ при $S \rightarrow \infty$, и введена для учета эффекта резкого снижения эффективности воспроизводства при деградации нерестового стада; ζ – параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящие от численности; $k \in [\frac{1}{2}, 1)$; $c < 1$ – степень выраженности эффекта Олли, выявленного нами для популяции волжской севрюги *Acipenser stellatus* по анализу данных мониторинга ЦНИОРХ; α – мгновенный коэффициент компенсационной смертности; β – мгновенный коэффициент декомпенсационной смертности; $t \in [0, T]$ – специфичный интервал уязвимости.

2. Свойства динамической системы Начальные условия для численного решения задачи Коши $R = \psi(S)$ определяются следующим образом: $N(0) = \lambda S$, $w(0) = w_0$. В инструментальной среде получен график зависимости воспроизводства в виде множества решений задач Коши (2) для $S \in \mathbb{N}^+$, оказавшейся унимодальной кривой с искомыми свойствами: двумя нетривиальными пересечениями R_1^*, R_2^* с биссектрисой $R = S$; пологой ниспадающей правой ветвью с отличной от нуля асимптотой; крутой возрастающей ветвью при $R_1^* < R < R_{max}$. нетривиальное стационарное состояние R_1^* оказывается неустойчивой

«репеллерной» неподвижной точкой, делящей фазовое пространство Ω на два подмножества. Тривиальное равновесие итерированной зависимости устойчиво, соответственно имеет область притяжения Ω_0 .

Дальнейшее развитие подхода с точки зрения теории этапности развития организмов привело к созданию непрерывно-дискретных моделей в виде системы ОДУ с изменяемой правой частью, алгоритмически представленных в форме гибридного автомата [2]. Была получена неунимодальная определенная численным решением зависимость и дискретная динамическая система характеризующаяся возникновением переходного хаотического режима. Хаотический режим связан со сложной структурой границы областей притяжения единственного устойчивого стационарного состояния и тривиального равновесия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 13-07-00925.

Список литературы

1. *Ricker W.* Stock and recruitment // J. of the Fisheries research board of Canada. 1954. Vol. 11. N 5. P. 559–623.
2. *Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б.* Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. СПб.: БХВ, 2006. 224 с.

СХЕМА КРАНКА-НИКОЛСОН ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Г. Пименов

Уральский федеральный университет имени первого Президента России
Б.Н.Ельцина, Институт математики и компьютерных наук

Ленина 51, 620000 Екатеринбург, Россия

Vladimir.Pimenov@usu.ru

Введение. Математические модели самых различных объектов могут содержать одновременно два эффекта: распределенность по состоянию и запаздывание по времени [1]. Примером может служить однородное уравнение теплопроводности с наличием временного постоянного сосредоточенного запаздывания в производной по состоянию [2]. Если рассматривать управление таким объектом по принципу обратной связи, то порождаемая управлением неоднородность будет иметь функциональный эффект наследственности по состоянию, например,