Уровень надежности определяем аналогично, вычислив по формуле (2) величину $L(X_C)$, где X_C — вычисляется по формулам (1) при замене φ_R на φ_C. Также представляет интерес интегральная вероятностная оценка надежности $P(X : \varphi(X) > \varphi_C | X \in G) = P(X \in G_C \cap G)/P(X \in G)$($\cup$ — знак пересечения) или более «жестко» – $P(X \in G \cap Int_C)/P(X \in G)$, где $Int_C = \{X : f(X) < f_C\}$ внутренность эллипсоида надежности $W_C = \{X : f(X) = f_C\}, f_C = f(X_C)$. Аналогично, интегральный риск можно определить не как $R_{Int} = P(\in G_R \cup G)/P(\in G)$, а как $R_{Int} = 1 - P(X \in G \cap Int_R)/P(X \in G)$, где $Int_R = \{ : f(X) < f_R\}$ внутренность эллипсоида риска W_R.

В качестве значений параметров распределения Θ и Σ используются их несмещенные оценки, которые вычисляются по имеющимся наблюдениям за работой предприятия $\{X_t, t = 1, 2, \ldots, T\}$, T – продолжительность наблюдаемого периода.

Список литературы

1. *Altman E.* Managing Credit Risk, 2nd Edition. John Wiley and Sons, 2008.
2. *Altman E.* Corporate Financial Distress and Bankruptcy, 3rd edition. John Wiley and Sons, 2005.
3. *Altman E.* Recovery Risk. 2005.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Л.А. Поддубная, И.М. Черевко

Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича, факультет прикладной математики, Коцюбинского 2, 57012 Черновцы, Украина
larpi@rambler.ru, i.cherevko@chnu.edu.ua

Введение. Для линейных систем с запаздыванием условием их асимптотической устойчивости является отрицательность действительных частей корней соответствующих квазиполиномов. Вычисление корней квазиполиномов либо анализ их локализации – это достаточно сложная задача, особенно для систем высокого порядка.

В данной работе схемы аппроксимации дифференциально-разностных уравнений (ДРУ) системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) применяются для исследования устойчивости линейных ДРУ.

1. Схемы аппроксимации. Схема аппроксимации линейных ДРУ последовательностью ОДУ впервые была предложена Н.Н. Красовским [1]. Точность аппроксимации нелинейных ДРУ исследована Ю.М. Репиным [2]. Построение схем аппроксимации для новых классов ДРУ в разных функциональных пространствах выполнено в работах [3]–[5].

Рассмотрим линейное ДРУ с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{n} b_k x(t-\tau_k) = 0, \tag{1}$$

где $b_k \in \mathbb{R}, k \in \{1, 2, ..., n\}, 0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n = \tau$.

Квазиполином для уравнения (1) имеет вид

$$P(\lambda) = \lambda + \sum_{k=0}^{n} b_k e^{-\lambda\tau_k} = 0. \tag{2}$$

Поставим в соответствие уравнению (1) последовательность аппроксимирующих систем ОДУ

$$\frac{dz_0(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{n} b_k z_{l_k}(t) = 0,$$

$$\frac{dz_k(t)}{dt} + \mu\left(z_k(t) - z_{k-1}(t)\right) = 0, \tag{3}$$

$$k = \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau}, l_k = \left[\frac{m\tau_k}{\tau}\right], m \in \mathbb{N}.$$

Для характеристического уравнения аппроксимирующей системы (3), учитывая ее структуру, можно получить соотношение [4]

$$\Psi_m(\lambda) = \lambda\left(1 + \frac{\lambda\tau}{m}\right)^m + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(1 + \frac{\lambda\tau}{m}\right)^{m-l_k} = 0. \tag{4}$$

Лемма 1 ([4]) *Для фиксированных $\lambda \in \mathbb{C}$ последовательность функций*

$$H_m(\lambda) = \Psi_m(\lambda)\left(1 + \frac{\lambda\tau}{m}\right)^{-m}, \quad m \in \mathbb{N} \tag{5}$$

сходится при $m \to \infty$ к квазиполиному $P(\lambda)$.

Замечание 1. *Поскольку нули функций $\Psi_m(\lambda)$ и $H_m(\lambda)$, согласно равенству (5), совпадают, то корни характеристического многочлена (4) можно брать за приближенные значения неасимптотических корней квазиполинома $P(\lambda)$.*

2. Анализ устойчивости.

Теорема 1 ([6]) *Пусть* $\{b_k, \tau_k\} \subset (0, \infty), (1 \leq k \leq n)$. *Если*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \tau_k < \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

тогда все корни квазиполинома (2) имеют отрицательные действительные части.

Данная теорема определяет достаточные условия устойчивости уравнения (1), однако она не позволяет эффективно построить коэффициентные области устойчивости, так как нулевое решение уравнения (1) может быть устойчивым при как угодно большом значении $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \tau_k$ [6].

Пусть в уравнении (1) запаздывания τ_k – положительные рациональные числа.

Определение 1. *Областью устойчивости уравнения (1) называется множество точек* $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, *для которых все корни уравнения (2) удовлетворяют условию* $Re\lambda < 0$.

Теорема 2 ([7]) *Область устойчивости уравнения (1) ограничена.*

Связь между устойчивостью уравнения с запаздыванием (1) и аппроксимирующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений устанавливает утверждение.

Теорема 3 ([4]) *Если нулевое решение уравнения (1) экспоненциально устойчиво (неустойчиво), тогда существует* $m_0 > 0$ *такое, что при* $m \geq m_0$ *нулевое решение системы (3) экспоненциально устойчиво (неустойчиво). Если при всех* $m \geq m_0$ *нулевое решение системы (3) экспоненциально устойчиво (неустойчиво), то и нулевое решение уравнения (1) экспоненциально устойчиво (неустойчиво).*

Применяя теорему 3 и лемму 1, предложены эффективные алгоритмы нахождения верхнего предела запаздывания τ, при котором сохраняется устойчивость [8], и построения коэффициентных областей устойчивости линейного ДРУ со многими запаздываниями [7].

Список литературы

1. *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. матем. механ. 1964. Т. 28. № 4. С. 716–725.

2. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // Прикл. матем. механ. 1965. Т. 29. № 2. С. 226–245.
3. *Cherevko I., Piddubna L.* Approximation of differential difference equations and calculation of nonasymptotic roots of quasipolynomials // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. 1999. V.29. N 1. P. 15–21.
4. *Матвий О.В., Черевко И.М.* Об аппроксимации систем с запаздыванием и их устойчивость // Нелинейные колебания. 2004. Т. 7. № 2. С. 208–216.
5. *Черевко И.М., Матвий О.В.* Исследование схем аппроксимации дифференциально-разностных уравнений // Math. Analysis, Differential equations and Applications. Sofia, 2011. P. 301–312.
6. *Вагина М.Ю., Кипнис М.М.* Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Мат. заметки. 2003. Т. 74. Вып. 5. С. 786–789.
7. *Клевчук И.И., Пернай С.А., Черевко И.М.* Построение областей устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений // Докл. НАН Украины. 2012. № 7. С. 28–34.
8. *Матвий О.В., Пернай С.А., Черевко И.М.* Об устойчивости линейных систем с запаздыванием // Научн. вестник Черновицкого ун-та. 2008. Вып. 421. С. 66–70.

ПРЯМОЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.С. Половинкин

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия
polovinkin@mail.mipt.ru

Введение. В докладе развивается метод касательных конусов ко множеству решений дифференциального включения для решения оптимизационных задач с дифференциальными включениями из $\mathbb{R}^n$ (см. [1]) на случай дифференциальных включений из сепарабельных банаховых пространств.

1. Основные понятия. Обозначим через E и E_1, E_2 сепарабельные банаховы пространства, через $\mathcal{P}(E)$ ($\mathcal{F}(E)$) — множество всех непустых (замкнутых) подмножеств из банахова пространства E. Для невыпуклых множеств из E широко известны (см. [2, 3, 4]) *нижний касательный конус* $T_H(A;a)$, *верхний касательный конус (иначе: контингентный конус* $T_B(A;a)$, и *касательный конус Кларка* $T_C(A;a)$. Также, используя понятие разности Минковского $A \overset{*}{-} B \doteq \{x \in E \mid$