

$$\begin{aligned}\dot{y} &= A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, y(t_*) = y_*, \\ \mu \dot{z} &= A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, z(t_*) = z_*, \\ y(t^*) &= 0, z(t^*) = 0, J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (y'Q(t)y + u'P(t)u)dt \rightarrow \min,\end{aligned}$$

где μ – малый положительный параметр, t_*, t^* – заданные моменты времени ($t_* < t^*$), y – вектор медленных переменных, z – вектор быстрых переменных, u – вектор управления, $Q(t)$ – неотрицательно определенная симметрическая матрица, а $P(t)$ – положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \in [t_*, t^*]$. Предполагается, что матрица $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, устойчивая, т.е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

Целью исследования рассмотренной задачи, которую можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами, является построение асимптотических приближений к ее решению в виде программы и обратной связи. Суть применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных – конечномерных элементов, по которым можно легко восстановить решение задачи.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Е. Лещёв, Л.И. Минченко

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки 6, 220013 Минск, Беларусь
{leschov,inform}@bsuir.by

Необходимые условия играют ключевую роль в проверке на оптимальность решений задачи математического программирования. Наряду с необходимыми условиями Куна-Таккера для дополнительной проверки решений на оптимальность используются необходимые условия оптимальности второго порядка, которые условно можно разделить на классические условия, применимые для широкого круга задач с традиционными условиями регулярности Мангасаряна-Фромова, и так называемые сильные необходимые условия (SSONC). Справедливость сильных необходимых условий второго порядка тесно связана с выполнением более жестких условий

регулярности второго порядка (в противоположность условиям регулярности первого порядка, гарантирующих справедливость условий Куна-Таккера в оптимальной точке). В [1, 2] показано, что условиями регулярности второго порядка являются условие регулярности постоянного ранга [3] и ослабленное условие регулярности постоянного ранга [4]. Нашей целью является получение сильных необходимых условий второго порядка при более слабых предположениях.

Пусть $f(y)$ и $h_i(y)$ $i = 1, \dots, p$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R , $I = \{1, \dots, s\}$, $I_0 = \{s + 1, \dots, p\}$ или $I_0 = \emptyset$. Введем непустое множество допустимых точек

$$C = \{ y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0 \quad i \in I, \quad h_i(y) = 0 \quad i \in I_0 \}$$

и рассмотрим задачу (P) математического программирования

$$f(y) \rightarrow \min, \quad y \in C.$$

Для задачи (P) введем функцию Лагранжа

$$L(y, \lambda) = f(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle, \text{ где } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad h = (h_1, \dots, h_p)$$

и множество множителей Лагранжа в точке y

$$\Lambda(y) = \{ \lambda \in R^p \mid \nabla_y L(y, \lambda) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \text{ и } \lambda_i h_i(y) = 0, \quad i \in I \}.$$

Пусть также $I(y) = \{ i \in I \mid h_i(y) = 0 \}$.

Среди необходимых условий оптимальности второго порядка наибольший интерес вызывают так называемые сильные необходимые условия оптимальности SSONC (Strong Second Order Necessary Conditions). Говорят, что точка $y^0 \in C$ удовлетворяет условию SSONC, если при любом векторе $\lambda \in \Lambda(y^0)$ выполняется неравенство

$$\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } \bar{y} \in K_C^\lambda(y^0),$$

где $K_C^\lambda(y^0)$ — конус критических направлений множества C в точке y^0 , связанный с множителем Лагранжа $\lambda \in \Lambda(y^0)$ и определяемый условием

$$K^\lambda(y^0) = \{ \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in I_0, \\ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in I^\oplus(y^0), \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \leq 0 \quad i \in I^\oplus(y^0) \},$$

где $I^\oplus(y^0) = \{ i \in I(y^0) \mid \lambda_i > 0 \}$, $I^\oplus(y^0) = \{ i \in I(y^0) \mid \lambda_i = 0 \}$.

Положим $I_D(y^0) = \{ i \in I(y^0) \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad \forall \bar{y} \in D_C(y^0) \}$, $I_\#(y^0) = I(y^0) \setminus I_D(y^0)$.

Определение 1. Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено условие критической регулярности, если $\text{rank}\{\nabla h_i(y) \mid i \in I_0 \cup I_D(y^0)\} = \text{const}$ в окрестности точки y^0 .

Следующая теорема обобщает аналогичные результаты [1, 2].

Теорема 1. Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи (P), выполнено условие критической регулярности. Тогда в данной точке выполняется условие SSONC.

Отметим, что полученная теорема обобщает результаты [1, 2].

Список литературы

1. Andreani R., Eshague C.E., Schverdt M.L. Journal on Optimization Theory and Appl., 146, 2010. P. 255–266.
2. Minchenko L., Stakhovski S. SIAM Journal on Optimization. V.21, N1. 2011. P. 314–332.
3. Janin R. Mathematical Programming Study 21, 1984. P. 110–126.
4. Minchenko L., Stakhovski S. Optimization. V. 60, N4. 2011. P. 429–440.

СВОЙСТВА УСТОЙЧИВЫХ И ПРИТЯГИВАЮЩИХ МНОЖЕСТВ G-СИСТЕМЫ

А.А. Леваков, Я.Б. Задворный

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики

Независимости 4, Минск, Беларусь

levakov@tut.by, slava.zadvorny@gmail.com

Пусть $f(t, x)$ - полудинамическая система, заданная в метрическом пространстве X и пусть Φ - семейство всех ее движений. Полунепрерывную полудинамическую систему $f(t, x)$ будем называть G -системой, если она обладает следующим свойством: существует $\omega > 0$ такое, что, если последовательность движений $\varphi_n(t) \in \Phi$ ограничена на некотором отрезке $[a - \omega; b]$, то из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся при каждом $t \in [a; b]$ к некоторому движению системы $\varphi \in \Phi$.