

5. *Le Ménéec S.* Linear differential game with two pursuers and one evader // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol.11: Advances in Dynamic Games. Theory, Applications, and Numerical Methods for Differential and Stochastic Games, M.Breton and K.Szajowski eds. Birkhauser, Boston, 2011. P. 209–226.
6. *Shinar J., Shima T.* Non-orthodox guidance law development approach for intercepting maneuvering targets // J. Guid. Contr. Dyn. 2002. Vol. 25. No. 4. P. 658–666.

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В.М. Кунцевич

Институт космических исследований НАНУ-ГКАУ
пр. Глушкова, 40, к. 4/1, 03680 Киев, Украина
vm_kuntsev@mail.ru

1. Постановка задачи. Задано уравнение семейства систем

$$X_{n+1} = F(X_n, U_n, A) = AX_n + f(X_n)G + BU_n, \quad (1)$$

где $X_n \in \mathbb{R}^m$; $U_n \in \mathbb{R}^m$; A – матрица $(m \times m)$, для строк A_i^T которой заданы их оценки

$$A_i^T \in \mathbf{A}_i = \text{conv}_{j=1; 2^m} \left\{ A_i^j \right\}; i = \overline{1; m}; \quad (2)$$

B – матрица $(m \times m)$; $G^T = (0, 0, \dots, 0, g_m)$ – вектор. Скалярная однозначная функция $f(X)$ задана с точностью до параметра l , $f(X) = l\tilde{f}(X)$, где $\tilde{f}(X)$ – известная функция, такая что $\tilde{f}(0) = 0$. Для параметра l задана его оценка $l \in \mathbf{l} = \{l : \underline{l} \leq l \leq \bar{l}\}$, где $\underline{l}$, $\bar{l}$ – заданные числа.

Примем, что вектор X_n измеряется полностью, но с ограниченными помехами, и результат измерений имеет вид

$$Y_n = X_n + Z_n, \quad Z_n \in \mathbf{Z} = \{Z : \|Z\| \leq \Delta\}. \quad (3)$$

Целью управления является минимизация первой разности $\Delta v_n(X_n, U_n, A)$ функции Ляпунова $v_n = v(X_n)$. Для центрально симметрического множества $\mathbf{Z}$ из (3) оптимальная оценка $\mathbf{X}_n^*$ вектора X_n равна $\mathbf{X}_n^* = Y_n$. Тогда окончательно получим

$$\min_{U_n} \max_{\substack{A \in \mathbf{A} \\ l \in \mathbf{l}}} v \left[AX_n + l\tilde{f}(X_n)G + BU_n \right]. \quad (4)$$

2. Решение задачи синтеза. Рассмотрим случай, когда управление $U_n = u_n$ – скалярная величина. При этом примем, что в (1) B – m -мерный вектор $B^T = (0, 0, \dots, b_m)$. Примем, что матрица A – матрица Фробениуса, для строки A_m^T которой задана ее оценка (2). Функцию Ляпунова $v(X_n)$ примем в виде

$$v(X_n) = \|X_n\|, \quad \|X\| = \sum_{i=1}^m |x_i|. \quad (5)$$

Представим множество $\mathbf{A}_m$ в центрированной форме

$$\mathbf{A}_m = \overset{o}{A}_m + \delta \mathbf{A}_m, \quad \delta \mathbf{A}_m = \text{conv}_{j=\bar{1}; \bar{N}} \left\{ \Delta A_m^j = A_m^j - \overset{o}{A}_m \right\}, \quad (6)$$

где $\overset{o}{A}_m$ – центр сферы минимального радиуса $r(\mathbf{A}_m)$, описанной вокруг множества $\mathbf{A}_m$.

Множество $\mathbf{l}$ также представим в центрированной форме

$$l \in \mathbf{l} = \overset{o}{l} + \delta \mathbf{l}; \quad \delta \mathbf{l} = \{ \Delta l : |\Delta l| \leq 0,5(\bar{l} - \underline{l}) \}, \quad \overset{o}{l} = 0,5(\bar{l} + \underline{l}). \quad (7)$$

С учетом (6)–(7) окончательно имеем

$$\min_{U_n} \max_{\substack{\Delta A_m \in \delta \mathbf{A}_m \\ \Delta l \in \delta \mathbf{l}}} \left[(\overset{o}{A}_m + \Delta A_m)^T Y_n + q_m (\overset{o}{l} + \Delta l) \tilde{f}(Y_n) + b_m u_n \right]. \quad (8)$$

Утверждение. Эта минимаксная задача имеет аналитическое решение

$$u_n = u_n^* = -b_m^{-1} \left[\overset{o}{A}_m^T Y_n + q_m \overset{o}{l} \tilde{f}(Y_n) \right]. \quad (9)$$

Приняв во внимание (6)–(7), после подстановки (9) в (1), имеем

$$x_{m,n+1} = \Delta A_m^T X_n + \Delta l q_m \tilde{f}(X_n) + (\overset{o}{A}_m + \Delta A_m)^T Z_n + \\ + g_m \overset{o}{l} [f(X_n) - f(X_n + Z_n)] \quad (10)$$

и получаем нелинейное уравнение семейства замкнутых неавтономных систем

$$X_{n+1} = \Delta A X_n + \Delta l \tilde{f}(X_n) + \overset{o}{l} \tilde{f}(X_n) G + \tilde{z}_n G, \quad (11)$$

где ΔA – матрица Фробениуса, для m -той строки которой имеем оценку $\Delta A_m^T \in \delta \mathbf{A}_m$,

$$\tilde{z}_n = (\overset{o}{A}_m + \Delta A_m)^T Z_n + g_m \overset{o}{l} [\tilde{f}(X_n) - \tilde{f}(X_n + Z_n)]. \quad (12)$$

Для определения оценки сверху возмущения $\tilde{z}_n$ ограничимся исследованием системы (1) лишь в области

$$X_n \in \overset{o}{\mathbf{X}} = \left\{ X : \|X\| \leq \overset{o}{\rho} \right\}. \quad (13)$$

Оценку сверху возмущения $\tilde{z}_n$ по $\overset{o}{\mathbf{X}}$, оценкам $\mathbf{A}_m$, $\delta \mathbf{l}$, z найдем из решения задачи

$$\max_{\substack{X_n \in \overset{o}{\mathbf{X}} \\ Z_n \in \mathbf{Z} \\ A_m \in \mathbf{A}_m}} \left| (\overset{o}{A}_m + \Delta A_m)^T Z_n + g_m \overset{o}{l} \left[\tilde{f}(X_n) - \tilde{f}(X_n + Z_n) \right] \right|. \quad (14)$$

Эволюцию семейства систем (11), (12) запишем в терминах разностных включений [1]

$$\begin{aligned} X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} &= \mathbf{H}(\mathbf{X}_n, \mathbf{A}_n, \delta \mathbf{l}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{X}_n, \mathbf{A}_m, \delta \mathbf{l}) &= \underline{H}(\mathbf{X}_n) \times h_m(\mathbf{X}_n, \mathbf{A}_m, \delta \mathbf{l}). \end{aligned} \quad (15)$$

Если справедливо неравенство $r(\mathbf{X}_{n+1}) < r(\mathbf{X}_n)$, где $r(\mathbf{X}_n)$ – радиус множества $\mathbf{X}_n$, то преобразование $\mathbf{H}(\mathbf{X}_n, \mathbf{A}_m, \delta \mathbf{l})$ осуществляет сжатое отображение множества $\mathbf{X}_n$ в множество $\mathbf{X}_{n+1}$. Ниже примем, что указанное неравенство выполняется и семейство систем (11) имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$. Эволюцию семейства неавтономных систем (11) запишем в терминах разностных включений

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{H}(\mathbf{X}_n, \mathbf{A}_m, \mathbf{l}) + \tilde{\mathbf{z}}G. \quad (16)$$

Приняв, что $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$, из (16) получим уравнение $\overset{*}{\mathbf{X}} = \mathbf{H}(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \tilde{\mathbf{Z}}$, где $\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{z}}G$, решение которого определяет инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Полученные выше результаты очевидным образом обобщаются на класс систем с векторным управлением и с нелинейной вектор-функцией $F(X)$.

Список литературы

1. Кунцевич А.В., Кунцевич В.М. Устойчивость в области нелинейных разностных включений // Кибернетика и системный анализ. 2010. № 5. С. 51–59.