

2. Досаев М.З., Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О колебаниях системы груз-парашют // Нелинейные колебания механических систем. Труды VIII Всерос. научной конференции. Т.2. Н.Новгород, 2008. С. 106–108.
3. Жуковский Н.Е. О парении птиц // Собрание сочинений. Т.IV. Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1949. С. 5–34.
4. Жуковский Н.Е. О парении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси // Собрание сочинений. Т.IV. Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1949. С. 41–91.
5. Локшин Б.Я., Самсонов В.А. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. Качественный анализ. М.: Изд-во Московского ун-та. 2012. 238 с.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СИЛЬНО ВЫПУКЛЫХ И СЛАБО ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОЛУНОРМОЙ

М.С. Лопушански

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Россия

masha.alexandra@gmail.com

Исследованию различных классов сильно и слабо выпуклых множеств посвящены работы [1], [2], [3], [4], в которых сильная и слабая выпуклость множества определяется через норму банахова пространства. В работе [5] показано, что методы параметрически выпуклого анализа можно развить и для так называемой несимметричной нормы, при этом роль шара играет несимметричный квазишар. В настоящей работе мы отказываемся не только от симметричности, но и от ограниченности квазишара, что позволяет применять развиваемые здесь методы к надграфикам функций, которые являются неограниченными множествами. Здесь под квазишаром в нормированном пространстве E понимается выпуклое замкнутое множество $M \subset E$, для которого ноль является внутренней точкой и $M \neq E$. Функция Минковского $\mu_M(x) = \inf \{t > 0 \mid x \in tM\}$ такого квазишара представляет собой несимметричную полунорму и используется в определениях сильно выпуклых и слабо выпуклых множеств.

Напомним, что *суммой* и *разностью Минковского* множеств $A \subset E$ и $B \subset E$ называются соответственно множества

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \quad A \stackrel{*}{-} B = \{x \in E \mid x + B \subset A\}.$$

Пусть $M \subset E$ – квазишар. M -расстоянием от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ называется величина

$$\varrho_M(x, A) = \inf_{a \in A} \mu_M(x - a).$$

M -проекцией точки $x \in E$ на множество $A \subset E$ называется множество

$$P_M(x, A) = A \bigcap (x - \varrho_M(x, A)M).$$

Множеством единичных проксимальных нормалей к множеству $A \subset E$ в точке $a \in A$ относительно квазишара $M \subset E$ называется

$$N_M^1(a, A) = \{z \in E \mid \mu_M(z) = 1, \quad \exists t > 0 : a \in P_M(a + tz, A)\}.$$

Множество $C \subset E$ называется *сильно выпуклым относительно квазишара $M \subset E$* , если C выпукло, замкнуто и

$$C - c \subset M - z \quad \forall c \in C \quad \forall z \in N_M^1(c, C).$$

Множество $A \subset E$ называется *слабо выпуклым относительно квазишара $M \subset E$* , если

$$a \in P_M(a + z, A) \quad \forall a \in A \quad \forall z \in N_M^1(a, A).$$

Множество $M \subset E$ называется *параболическим*, если для любого вектора $b \in E$ множество $(b + \frac{1}{2}M) \setminus M$ ограничено. Множество $M \subset E$ называется *параболическим в усиленном смысле*, если для любого ограниченного множества $B \subset E$ множество $(B + \frac{1}{2}M) \setminus M$ ограничено.

Множество $M \subset E$ называется *ограниченно равномерно выпуклым*, если

$$\delta_M^d(\varepsilon) > 0 \quad \forall d > 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где $\delta_M^d(\varepsilon) = \sup \left\{ \delta \in [0, \frac{\varepsilon}{2}] \mid B_\delta\left(\frac{x+y}{2}\right) \subset M \quad \forall x, y \in M \cap B_d(0) : \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}$, $B_R(a) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq R\}$.

Пусть задан квазишар $M \subset E$. Множество $A \subset E$ называется *M -замкнутым*, если для любой точки $x \in E \setminus A$ справедливо неравенство $\varrho_M(x, A) > 0$.

Для множества $A \subset E$ и квазишара $M \subset E$ рассмотрим условие

$$\sup \left\{ \frac{\|x - a\|}{\mu_M(x - a)} : x \in E \setminus A, a \in P_M(x, A), \|a\| \leq d \right\} < +\infty \quad \forall d > 0. \quad (1)$$

Легко видеть, что если квазишар M ограничен, то любое множество A удовлетворяет условию (1). Можно показать, что если множество A является надграфиком функции, удовлетворяющей условию Липшица

на любом ограниченном множестве, а квазишар M является надграфиком выпуклой непрерывной функции m такой, что $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{m(x)}{\|x\|} = +\infty$, то условие (1) также выполнено.

Следующие результаты получены в предположении, что квазишар M является параболическим и ограничено равномерно выпуклым, а пространство E – банахово.

Теорема 1. (О ближайших точках, [6]). Пусть множество $C \subset E$ является сильно выпуклым относительно квазишара $-rM$, а множество $A \subset E$ замкнуто и слабо выпукло относительно квазишара RM , где $0 < r < R$. Пусть $0 < \varrho_M(C, A) < R - r$. Тогда $\min_{c \in C, a \in A} \mu_M(c - a)$ достигается в единственной паре точек.

Теорема 2. (О сумме Минковского сильно выпуклого и слабо выпуклого множеств). Пусть множество $C \subset E$ сильно выпукло относительно квазишара rM , $rM \overset{*}{\subset} C \neq \emptyset$ и $\text{int } C \neq \emptyset$. Пусть множество $A \subset E$ является слабо выпуклым относительно квазишара RM , M -замкнутым и удовлетворяет условию (1), где $0 < r < R$. Тогда множество $A + C$ является M -замкнутым и слабо выпуклым относительно квазишара $(R - r)M$. Если, дополнительно, квазишар M является параболическим в усиленном смысле, то множество $A + C$ удовлетворяет условию (1).

Данные результаты были получены совместно с Г.Е. Ивановым.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 13-01-00295-а.

Список литературы

1. Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения М.: Физматлит, 2006.
2. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа М.: Физматлит, 2007.
3. Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R. Proximal Smoothness and Lower- C^2 Property // J. Convex Anal. – Т. 2, N 1,2. – 1995. – С. 117–144.
4. Vial J.-P. Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Ops. Res. – Т. 8, N 2. – 1983. – С. 231–259.
5. Иванов Г. Е. Перестановочность операций суммы и разности Минковского для множеств в равномерно выпуклом банаховом пространстве // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики. М.: МФТИ, 2008, С. 32–55.
6. Иванов Г. Е., Лопушански М. С. Аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой // Труды МФТИ – Т. 4, N 4. – 2012. – С. 94–104.