

Данное уравнение в зависимости от конкретных требований должно быть дополнено соответствующими граничными и начальными условиями. В работе для нахождения решения уравнения строятся прямые и обратные интегральные преобразования, которые определяются с помощью канонической системы функций, образованной собственными и присоединенными функциями прямого L и сопряженного $L^\dagger$ операторов, заданных в должным образом выбранных функциональных пространствах.

Список литературы

1. Тулкина А.Н. Определение частот и форм колебаний стержневой системы, содержащей нанообъект, на основе теории С.П. Тимошенко // Вестник СПбГУ (серия 1), СПбГУ, 2011. Вып. 1. С. 144–154.
2. Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Philosophical Mag. 1921. 41. P. 744–746.
3. Dymkou V, R. Rabenstein, and P. Stefen. Discrete simulation of a class of distributed systems using functional analytic methods // Multidimensional Systems and Signal Processing. 2006. Vol. 17. P. 177–209.
4. Dymkou V, Application of Operator Theory for the Representation of Continuous and Discrete Distributed Parameter Systems, PhD Thesis Erlangen-Nuremberg University, Germany, 2006.
5. Dymkou V and A. Pothérat, Spectral methods for wall bounded MHD // Journal of Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2009. V. 23. No. 6. P. 535–555.
6. Pothérat A. and V. Dymkou. Direct numerical simulations of low-Rm MHD turbulence based on the least dissipative modes // J. Fluid Mechanics. 2010. V. 655. P. 174–197.
7. Dymkov M., Dymkou V, and Dymkou S. MFT-method in gas pipeline modeling. Proceedings of VIII International Conference on Multidimensional (nD) systems (NDS-2013), Erlangen-Nuremberg, Germany, 2013. 6 pages.

ВАРИАЦИОННЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ С ПОЗИЦИОННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ СПУСКА В КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.А. Дыхта

Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
Лермонтова 134, 664033 Иркутск, Россия
dykhta@gmail.com

1. Введение. Доклад посвящен необходимым условиям оптимальности программных управлений, доказательства которых используют позиционные управления (вариации) спуска по функционалу.

Эти управления генерируются либо слабо монотонными решениями $(\varphi(t, x))$ неравенства Гамильтона-Якоби — для прямых вариационных условий оптимальности, — либо комбинацией бипозиционных функций $(S(t, x, \psi))$ с зависимостью от сопряженных переменных с копозиционными $(\theta(t, \psi))$ — для двойственных вариационных условий, связанных с некоторой задачей сравнения с оптимизируемыми траекториями сопряженной системы (см. [1, 2]).

Рассматривается следующая нелинейная задача оптимального управления (P) :

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$J[\sigma] = \ell(x(t_1)) \rightarrow \min,$$

а также её подклассы — линейные по состоянию (например, билинейные) и квадратичные. В задаче (P) предполагается, что функции f, ℓ удовлетворяют обычным условиям из теории гладкого принципа максимума (ПМ) и, кроме того, множество $U \subset R^m$ компактно, а f обеспечивает глобальное существование решений системы (1) с управлениями $u \in \mathcal{U} := L_\infty(T, U)$ и их относительную компактность в $C(T, R^n)$; $\sigma := (x, u) \in AC(T, R^n) \times \mathcal{U}$ — обозначение процессов системы (1), (2).

2. Вариационный принцип минимума. Сначала рассматривается *общее* вариационное условие минимума с нелинейными решениями неравенства Гамильтона-Якоби (в краткой записи $\min_U \dot{\varphi} \leq 0$). Из него в качестве следствия с линейными решениями $\varphi = \psi(t) \cdot x$ выводится вариационное условие минимума в понтрягинской форме, которое анонсируется ниже.

Пусть $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ — исследуемый процесс, $\mathcal{R}_1$ — множество достижимости в момент t_1 овыпукленной системы (1), (2) и $\mathcal{L}(x) : R^n \rightarrow R$ — любая гладкая мажоранта функции $\ell(x)$ в точке $\bar{x}(t_1)$ [1, 2], т.е. функция со свойством

$$(\exists x^* \in \mathcal{R}_1 : \mathcal{L}(x^*) < \mathcal{L}(\bar{x}(t_1))) \implies \ell(x^*) < \ell(\bar{x}(t_1)).$$

Обозначим через $\bar{\psi}(\cdot)$ решение сопряженной системы

$$\dot{\bar{\psi}} = -H_x(t, x, \bar{\psi}, u), \quad \bar{\psi}(t_1) = \mathcal{L}_x(\bar{x}(t_1)), \quad (3)$$

соответствующее процессу $\bar{\sigma}$ и выбранной мажоранте ($H = \bar{\psi} \cdot f(t, x, u)$), и определим многозначное отображение с замкнутым гра-

фиком

$$U_{\bar{\psi}}(t, x) = \underset{u \in U}{\operatorname{Argmin}} H(t, x, \bar{\psi}(t), u), \quad (t, x) \in T \times R^n. \quad (4)$$

Заметим, что условие трансверсальности в (3) соответствует минимуму функции H по $u \in U$ в ПМ для задачи сравнения с функционалом $\mathcal{L}(x(t_1))$.

Пусть $\mathcal{V}_{\bar{\psi}}$ — множество селекторов отображения (4) — однозначно определенных на $T \times R^n$ функций (в данном случае это и будут позиционные управления потенциального спуска по функционалу в точке $\bar{\sigma}$). Для любого $v \in \mathcal{V}_{\bar{\psi}}$ обозначим через $\mathcal{X}(v)$ объединение двух множеств решений разрывной системы

$$\dot{x} = f(t, x, v(t, x)), \quad x(t_0) = x_0 :$$

а) конструктивных движений Красовского–Субботина [3] — равномерных пределов ломаных Эйлера (множество $\mathcal{X}^K(v)$); б) обычных решений Каратеодори, если $u(t) = v(t, x(t)) \in \mathcal{U}$ (множество $\mathcal{X}^0(v)$). Заметим, что для оптимального процесса $\bar{\sigma}$ при любом выборе мажоранты $\mathcal{L}$ существует селектор $\bar{v} \in \mathcal{V}_{\bar{\psi}}$, такой, что $\bar{x} \in \mathcal{X}^0(\bar{v})$.

Теорема 1. *Если процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ оптимален, то при любом выборе мажоранты $\mathcal{L}$ $\bar{x}(\cdot)$ является решением задачи*

$$\mathcal{L}(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\bar{\psi}} := \bigcup_{v \in \mathcal{V}_{\bar{\psi}}} \mathcal{X}(v).$$

Если отвлечься от использования мажорант, то можно заметить, что этот вариационный принцип минимума осуществляет расщепление двухточечной задачи ПМ в сочетании с переходом к глобальным позиционным вариациям управления (вместо локальных по времени игольчатых вариаций). Учитывая принятое соглашение об условии трансверсальности, можно говорить о вариационном и классическом принципах минимума, причем последний следует из вариационного.

3. Заключение. Для линейных и квадратичных по состоянию задач оптимального управления получены не только вариационные условия оптимальности с позиционными управлениями, но и пары нестандартно двойственных эквивалентных задач. Все условия оптимальности конструктивны и естественным образом комбинируются, образуя итерационную процедуру решения рассматриваемых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11–01–00672-а, и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», соглашение № 8211 от 06.08.2012.

Список литературы

1. Дыхта В.А. Слабо монотонные и производящие L -функции в оптимальном управлении // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. I. 12–16 июня 2012 г. Казань: КАИ, 2012. С. 408–420.
2. Дыхта В.А. Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона-Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // Автоматика и телемеханика. 2013. (принято в печать).
3. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

ВЫРОЖДЕННЫЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Н.И. Желонкина¹, А.Н. Сесекин²

¹ Уральский федеральный университет, Мира 19, 620002 Екатеринбург, Россия
312115@mail.ru

² Институт математики и механики УрО РАН
С.Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия
sesekin@list.ru

Введение. Рассматриваются две задачи оптимального управления с вырожденным функционалом достаточно общего вида и линейной системой с последствием, в первой задаче последствие постоянное, во второй задаче — линейное. Отсутствие управления в функционале приводит к тому, что оптимальное управление содержит импульсную составляющую. Получены достаточные условия существования импульсного оптимального управления и получены уравнения, описывающие коэффициенты в оптимальном управлении для этих задач. Установлены достаточные условия, дающие возможность проинтегрировать уравнения и найти в явном виде коэффициенты для оптимального управления.

1. Постановка вырожденной задачи оптимальной стабилизации для систем с запаздыванием. Требуется построить управляющее воздействие v , обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 G(\theta)x(t + \theta)d\theta + Bv(t) \quad (1)$$