

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОШИБОК В МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

П.П. Забрейко, А.Н. Таныгина

Белгосуниверситет, механико-математический факультет

Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

zabreiko@mail.ru, anast-minsk@yandex.ru

Пусть X — банахово пространство, A — действующий в нем линейный оператор. Для линейного уравнения

$$x = Ax + b \quad (1)$$

рассматривается метод последовательных приближений

$$x_{n+1} = Ax_n + b \quad (n = 0, 1, \dots),$$

где x_0 — известное начальное приближение.

Известно [1], что в случае конечномерности пространства X и равномерно распределенной в некотором шаре начальной ошибки $\varepsilon_0 = x_* - x_0$, где x_* — решение уравнения (1), распределение ошибок $\varepsilon_n = x_* - x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) при больших n оказывается неравномерным; более точно, при больших n «доля» максимально возможных ошибок стремится к 100%. В работе [2] поведение ошибок ε_n было исследовано с иной точки зрения. Там для произвольного банахова пространства было показано, что при увеличении n ошибки, вообще говоря, стремятся «лечь» в некоторое маломерное подпространство, порожденное «частью» оператора A , соответствующей периферическому спектру (т. е. части спектра, лежащей на спектральной окружности $|\lambda| = \rho(A)$, где $\rho(A)$ — спектральный радиус оператора A). Оказывается, что соответствующие построения позволяют увидеть и тот факт, что величина этих ошибок при возрастании n становится наибольшей из возможных. В настоящем докладе предполагается обсуждение соответствующих результатов для произвольного банахова пространства в случае, когда на распределение начальной ошибки ε_0 не накладывается никаких ограничений, и, в частности, установление того факта, что асимптотика длин ошибок является максимально возможной для почти всех начальных ошибок.

Пусть периферический спектр оператора A является изолированной частью спектра этого оператора. В этом случае пространство X разлагается в прямую сумму подпространств X_0 и X^0 . Подпространство X_0 является областью значений коммутирующего с A оператора

проектирования $P_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$, где $\partial\Omega$ — граница кольцеобразной области, охватывающая периферический спектр. Из определения следует, что в случае принадлежности начальной ошибки подпространству X_0 убывание последовательности $(A^n \varepsilon_0)_{n \in \mathbb{N}}$ является «самым плохим». Подпространство X^0 является ядром оператора P_0 , т. е. областью значений дополнительного к P_0 проектора $P^0 = I - P_0$. Каждое из подпространств X_0 и X^0 инвариантно относительно оператора A . Обозначим через A_0 и A^0 сужения оператора A на подпространства X_0 и X^0 соответственно.

Спектр оператора A_0 совпадает с частью спектра A , лежащей на окружности $\{\lambda : |\lambda| = \rho(A_0) = \rho(A)\}$. Число $\varkappa(A) = \frac{\rho(A^0)}{\rho(A_0)}$ принято называть спектральным зазором; это число показывает, насколько абсолютная величина точек непериферического спектра оператора A меньше его спектрального радиуса. В частности, спектр оператора A^0 содержится в круге $\{\lambda : |\lambda| \leq \varkappa(A)\rho(A)\}$.

Предположим, что на пространстве X задана некоторая вероятностная мера μ , которая обращается в нуль на его собственных подпространствах. Обозначим для $0 < N < \infty$ через $S(N)$ коническое множество векторов $x \in X$, для которых $\|P^0 x\| \leq N\|P_0 x\|$. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть периферический спектр оператора A изолирован. Тогда для любого N , $0 < N < \infty$, и любого η , $0 < \eta < 1$, существует такое $n(\eta, N)$, что при $n > n(\eta, N)$ и $\varepsilon_0 \in S(N) \setminus X^0$ справедливо включение

$$A^n \varepsilon_0 \in L((1 - \eta)\|A^n P_0 \varepsilon_0\|, (1 + \eta)\|A^n P_0 \varepsilon_0\|),$$

где через $L(r_-, r_+)$ обозначен шаровой слой $\{x \in X : r_- \leq \|x\| \leq r_+\}$. В частности, почти наверное (для $\varepsilon_0 \notin X^0$) справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A^n \varepsilon_0\|}{\|A^n P_0 \varepsilon_0\|} = 1, \quad (2)$$

и вероятность (мера μ) того, что относительная разница величин ошибок $A^n \varepsilon_0$ и $A^n P_0 \varepsilon_0$ не превышает η , стремится к 1.

Соотношение (2) означает, что для достаточно больших номеров n основная часть ошибки $A^n \varepsilon_0$ (при $\varepsilon_0 \in S(N) \setminus X^0$) определяется проекцией $P_0 A^n \varepsilon_0 = A^n P_0 \varepsilon_0$ этой ошибки на подпространство X_0 . Иными словами, асимптотическое поведение последовательностей $A^n \varepsilon_0$ и

$A^n P_0 \varepsilon_0$ одинаково. Естественно попытаться найти эту асимптотику в явном виде.

Ограничимся здесь случаем, когда подпространство X_0 конечномерно. При этом предположении существует базис, в котором оператор A_0 задается матрицей, имеющей жорданову нормальную форму. Пусть ν_σ — размеры жордановых клеток в представлении A_0 ; $\nu = \max_\sigma \nu_\sigma$; $\lambda_\sigma = \rho(A) e^{i\theta_\sigma}$ ($\theta_\sigma = \arg \lambda_\sigma$) — собственные значения оператора A_0 , e_σ ($\|e_\sigma\| = 1$) — отвечающие им собственные векторы оператора A_0 ; e_σ^* ($\|e_\sigma^*\| = 1$) — собственные векторы сопряженного к A_0 оператора A_0^* ($\sigma = 1, 2, \dots, s$); $\Delta = \{\sigma \in \{1, 2, \dots, s\} : \nu_\sigma = \nu\}$.

Введем в рассмотрение оператор

$$T_n x = \frac{n^{\nu-1} \rho(A)^{n-\nu+1}}{(\nu-1)!} \sum_{\sigma \in \Delta} e^{i(n-\nu+1)\theta_\sigma} (e_\sigma^*, x) e_\sigma. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть периферический спектр оператора A изолирован и пространство X_0 конечномерно. Если $\sum_{\sigma \in \Delta} (e_\sigma^*, \varepsilon_0) e_\sigma \neq 0$, то справедливо соотношение

$$A^n P_0 \varepsilon_0 \sim T_n \varepsilon_0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где оператор T_n задается равенством (3), причем значения $T_n \varepsilon_0$ содержатся в шаровом слое $L(m\Lambda_n, M\Lambda_n)$, где $0 < m \leq M < \infty$ и

$$\Lambda_n = \frac{n^{\nu-1} \rho(A)^{n-\nu+1}}{(\nu-1)!} \sum_{\sigma \in \Delta} |(e_\sigma^*, \varepsilon_0)|.$$

В случае, когда $\nu = 1$, т. е. периферический спектр оператора A_0 является простым, значения $A^n P_0 \varepsilon_0$ содержатся в шаровом слое $L\left(\frac{m}{M} \rho(A)^n \|\varepsilon_0\|, \frac{M}{m} \rho(A)^n \|\varepsilon_0\|\right)$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф12Р-061).

Список литературы

1. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунцицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
2. Godunov B.A., Zabrejko P.P. Geometric characteristics for convergence and asymptotics of successive approximations of equations with smooth operators // Studia Mathematica. 1995. V. 116. № 3. P. 225–238.