ПОСТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО СТАБИЛЬНОГО МОСТА В ИГРАХ С ПРОСТЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ НА ПЛОСКОСТИ

Л.В. Камнева, В.С. Пацко

Институт математики и механики УрО РАН,
С. Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия
{kamneva,patsko}@imm.uran.ru

Введение. При построении множеств уровня функции цены (максимальных стабильных мостов) в дифференциальных играх [1, 2] приходится работать с попятными процедурами, требующими весьма мелкий шаг по времени при попятных построениях. Программные операторы, сопоставляющие заданному множеству и некоторому промежутку времени другое множество, используются при этом на каждом элементарном шаге попятного построения.

Программный оператор желательно выбрать так, чтобы его действие совпадало с действием позиционного оператора, предполагающего наличие промежуточных моментов разбиения и соответствующего предельного перехода. В вычислительном плане это позволяет более экономно конструировать процедуры попятных построений. В случае выпуклой функции платы таким программным оператором может быть выбран оператор программного поглощения [2, 3, 4].

Работа посвящена исследованиям, связанным с отказом от свойства выпуклости для задач на плоскости. Мы рассматриваем только системы с простыми движениями [1], поскольку именно они очень часто используются при локальной аппроксимации.

1. Постановка задачи. Рассмотрим конфликтно-управляемую систему с простыми движениями

$$\frac{dx}{dt} = u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

где t – время, P – выпуклый многоугольник или отрезок на плоскости $\mathbb{R}^2$, аналогичные условия накладываются на множество Q. Пусть M – многоугольник на плоскости $\mathbb{R}^2$. Первый игрок, распоряжающийся управлением u, стремится привести фазовый вектор системы (1) в фиксированный момент ϑ на множество M; второй игрок при помощи управления v препятствует этому.

Требуется разработать метод построения максимального u-стабильного моста [2] на промежутке времени $[t_*, \vartheta]$, обрывающегося на множестве M в момент ϑ. При этом для построения t-сечения моста метод не должен использовать какие-либо промежуточные точки отрезка $[t, \vartheta]$.

В дифференциальных играх с терминальной кусочно-линейной функцией платы ее любое связное множество уровня (множество Лебега) может быть взято в качестве M.

2. Ломаные спирали на плоскости. Рассматриваются спиралевидные ломаные на плоскости (рис. 1, а) с приписанным направлением нормалей. Их специфическое свойство состоит в том, что при обходе ломаной векторы нормалей вращаются в одну сторону.

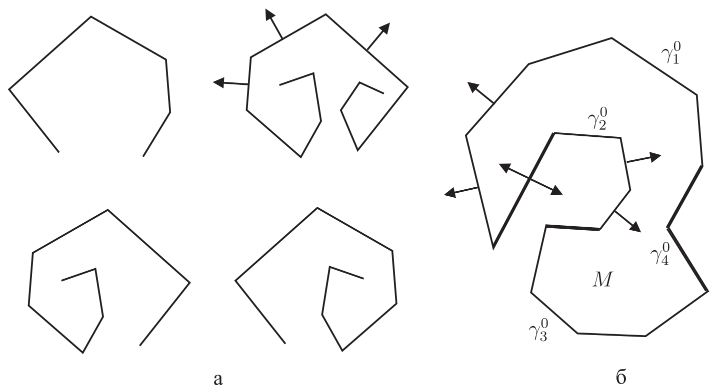

Рис. 1: а) Спиралевидные ломаные на плоскости. б) Представление границы множества M в виде объединения спиралей

Границу множества M можно представить в виде объединения $\gamma_1^0\gamma_2^0 \ldots \gamma_{2k-1}^0\gamma_{2k}^0$ четного числа дуг указанного типа так, что для половины дуг их нормали являются внешними по отношению к множеству M (*выпуклые дуги*), а для другой половины нормали направлены внутрь множества M (*вогнутые дуги*). При этом любые две соседние дуги имеют одно общее звено (*звено зацепления*). На рис. 1, б, показан пример множества M, граница которого образована четырьмя спиралями, две из которых являются выпуклыми и две вогнутыми; звенья зацепления показаны полужирными линиями.

Границу множества M будем называть начальным *фронтом.*

3. Основной результат. Каждой спирали γ_i^0, $i = \overline{1, 2k}$, на границе M ставится в соответствие с учетом динамики (1) новая ломаная $\gamma_i(\tau)$, $\tau \in [0, \vartheta - t_*]$, при этом $\gamma_i(0) = \gamma_i^0$. Основное требование на длину промежутка $[t_*, \vartheta]$ состоит в том, чтобы не исчезали участки зацепления дуг $\gamma_i(\tau)$, $i = \overline{1, 2k}$. Тогда последовательность ломаных $\gamma_1(\tau) \ldots \gamma_{2k}(\tau)$ формирует новый фронт для момента τ. При дополнительном условии отсутствия самопересечения фронта он ограничивает некоторое множество на плоскости. В работе доказывается, что оно является сечением максимального стабильного моста для момента $t = \vartheta - \tau$.

Заключение. В численных методах теории дифференциальных игр динамика простых движений совершенно естественно возникает при локальной аппроксимации линейной или нелинейной динамики, когда "замораживаются" возможности игроков по времени и по пространственным переменным. Различные варианты численного построения максимальных стабильных мостов с двумерной фазовой переменной, основанные на аппроксимации исходной управляемой системы системами с простыми движениями и выделении на границе строящегося множества дуг выпуклости (с внешними нормалями) и вогнутости (с внутренними нормалями), разрабатывались в отделе динамических систем Института математики и механики УрО РАН в работах В.Л. Туровой, Г.Г. Гарнышевой, С.С. Кумкова, А.Н. Жаринова.

Представляемый в данной работе результат может быть использован для уточнения промежутков времени, на которых без пересчета при "замороженной" динамике ведутся построения сечений максимального стабильного моста.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках" при финансовой поддержке УрО РАН (проект № 12-П-1-1012), а также при поддержке РФФИ, грант 12-01-00537.

Список литературы

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
4. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры, II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ИЗМЕРЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В.В. Карелин

Санкт-Петербургский государственный университет
Университетская наб. 7–9, 199034 Санкт-Петербург, Россия
vlkarelin@mail.ru

Пусть наблюдается случайный процесс $x(t)$, если время t принимает дискретные значения, то этот процесс $x(t) = x_t$ может быть описан