

2. Гребенникова И.В. Задача оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при интегральных квадратичных ограничениях // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. вып. 4. С. 3–11.
3. Кремлев А.Г. Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и Телемеханика. 1993. №. 9. С. 61–78.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОЦЕНИВАНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ

В.Ф. Губарев

Институт космических исследований НАНУ-ГКАУ

пр. Глушкова, 40, к. 4/1, 03680 Киев, Украина

v.f.gubarev@gmail.com

Введение. Для большинства задач оценивания и идентификации характерны две особенности. Первая состоит в том, что такие задачи относятся к классу обратных, а вторая касается исходных данных. Как правило, они формируются из измерений, которые содержат погрешности. Именно эти особенности при определенных условиях приводят к тому, что эти задачи становятся математически некорректно поставленными. Напомним, какие задачи считаем некорректно поставленными для операторного уравнения

$$Ax = u, \tag{1}$$

где A является непрерывным оператором, а обратный ему оператор A^{-1} во многих случаях оказывается не вполне непрерывным. Тогда при нахождении x по неточно заданной правой части будем иметь неустойчивые решения.

1. Задача оценивания. Пусть имеется линейный стационарный динамический объект

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k. \tag{2}$$

Считаем, что все собственные значения матрицы A лежат внутри единичного круга, т.е. система (2) устойчива. Ее состояние в произвольный момент времени N равно

$$x_N = A^N x_0 + \Omega_N u_{0:N}, \tag{3}$$

где $u_{0:N} = (u_{N-1}^T, \dots, u_1^T, u_0^T)^T$, $\Omega_N = (B, AB, \dots, A^{N-1}B)$.

Так как $\|A\| < 1$ (система устойчива), то x_N непрерывно зависит от x_0 . Чтобы найти x_0 по известному неточно x_N необходимо (3) домножить слева на $(A^{-1})^N$. При этом A^{-1} будет иметь неустойчивые собственные значения, а число обусловленности матрицы $(A^{-1})^N$ растет монотонно и неограниченно, т.е. при больших N и n обратный оператор не будет вполне непрерывным. Другими словами, обратная задача нахождения начального состояния x_0 по приближенному терминальному x_N будет некорректно поставленной.

Однако в реальных задачах оценивания известна не x_N , а наблюдаемая переменная y_k ,

$$y_k = Cx_k, \quad (4)$$

где размерность вектора y_k равна $m < n$. В этом случае по данным наблюдения на конечном отрезке времени задачу оценивания можно записать в виде

$$y_{0:N} = \Gamma_N x_0 + \Phi_N u_{0:N}, \quad (5)$$

где $y_{0:N} = (y_0^T, y_1^T, \dots, y_N^T)$,

$$\Gamma_N = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{pmatrix}, \quad \Phi_N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & CB \\ 0 & \dots & CB & CAB \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CB & \dots & CA^{N-2}B & CA^{N-1}B \end{pmatrix}.$$

Вектор x_0 может быть найден из (5), если система наблюдаема. Это означает, что при $N = n$ ранг Γ_n должен быть равен n . Тогда при точных измерениях x_0 можно найти из (5). Однако при измерениях с погрешностью $\tilde{y}_k = y_k + \xi_k$ (ξ_k - погрешность) рангового критерия для получения устойчивого решения недостаточно. Необходимо оценивать обусловленность матрицы Γ_n и когда она плохая, оценки будут неустойчивыми.

2. Задача идентификации. Она рассматривается как естественное развитие задачи оценивания (5), когда искомыми являются не только состояние x , но и элементы матриц A, B, C , а во многих случаях и размерность модели n .

Совершенно очевидно, что расширение искомым неизвестных может усложнить проблему разрешимости и привести к более жестким условиям, обеспечивающим устойчивость получаемого решения. Ужесточение требований в первую очередь касается входного сигнала. Он

должен быть информативным, обеспечивающим возбуждение всех мод системы.

Обеспечить на практике выполнение условий, при которых справедлива теория стохастической идентификации, гарантирующая получение несмещенных оценок, весьма проблематично также как и условий, обеспечивающих оптимальность фильтра Калмана. Даже необходимую длительность наблюдения за процессом реализовать не так-то просто в реальных условиях. Поэтому нахождение устойчивых решений по отношению к погрешностям в исходных данных особенно для многомерных систем из-за существенной некорректности задачи идентификации сопряжено с большими трудностями. Следует ориентироваться на аппроксимирующие модели, у которых размерность согласуется с основными показателями, характеризующими погрешности в данных. Согласованность при этом должна быть такой, что с уменьшением погрешности имела место сходимость к решению, соответствующему детерминированному случаю.

Для системы (2), (4), генерирующей данные, можно использовать информативное входное воздействие в виде последовательности прямоугольных импульсов чередующихся с интервалами свободного движения ($u_k \equiv 0$) одинаковой длительности. Тогда по аналогии с (5) можно получить матричное уравнение

$$Y = \Gamma_\alpha X, \quad (6)$$

где $Y = [y(1), \dots, y(N)]$; $X = [x(1), \dots, x(N)]$; α – число измерений на интервалах свободного движения (релаксации); $y(n) = [y^T(n), y^T(n+1), \dots, y^T(n+\alpha-1)]^T$ – вектор, составленный из измерений на n -ом интервале релаксации, $n \in \overline{1; N}$. Сигнальное подпространство Γ_α может быть выделено из Y в (6) полноранговым разложением $Y = Y_1 \cdot Y_2$ при условии $\alpha > n$ (предполагаемая размерность системы) и ранг Y_2 не менее n . Тогда согласно теории реализаций Y_1 можно рассматривать как матрицу наблюдаемости, а Y_2 как матрицу начальных состояний для некоторой эквивалентной реализации, определяемой неособым преобразованием по отношению ко всем другим. В качестве полнорангового разложения в 4SID-методе обычно используют SVD. Достоинство его в том, что оно позволяет представлять это разложение как

$$Y = Q_s \Sigma_s V_s^T + Q_e \Sigma_e V_e^T, \quad (7)$$

где Q_s содержит n главных левых сингулярных векторов и соответствующие им сингулярные числа диагональной матрицы Σ_s . Сингу-

лярные числа позволяют оценивать практический ранг матрицы Y . Второе слагаемое соответствует малосущественному на уровне шумов сигнальному подпространству. Выделяемое подпространство первого слагаемого определяет аппроксимирующую модель системы. Его выбор следует делать так, чтобы получаемое решение было устойчивым, т.е. согласованным с погрешностью исходных данных. Полагаем $Y_1 = Q_s = \Gamma_s$. Тогда из Γ_s , представленного в (5), можно получить переопределенную систему линейных уравнений для нахождения A

$$\Gamma_{1:s-1}A \approx \Gamma_{2:s}, \quad (8)$$

где $\Gamma_{1:s-1}$ получается из Γ_s исключением блока CA^{s-1} , а $\Gamma_{2:s}$ – исключением блока C .

Устойчивость получаемых решений определяется обусловленностью матрицы $\Gamma_{1:s-1}$. В работе обсуждаются различные способы согласованного с погрешностью выбора s .

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ И ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

М.И.Гусев

Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С.Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия
gmi@imm.uran.ru

Введение. Доклад посвящен задаче о построения внешних оценок множества достижимости нелинейной управляемой системы в виде множеств уровня гладких функций. В рассматриваемой системе выделяются линейные подсистемы, для которых соответствующие функции считаются известными. В качестве таковых можно, например, выбирать квадратичные функции, применяя технику эллипсоидальных аппроксимаций множеств достижимости [1]. Оценки для траекторий нелинейной системы строятся при помощи модификации оценок для линейной подсистем. В основе предлагаемых конструкций лежат дифференциальные неравенства и принцип сравнения [2, 3]. Рассматривается также вопрос о приближенном построении множеств достижимости при наличии фазовых ограничений. Предлагается аналог метода внутренних штрафных функций, позволяющий приблизить данное множество множествами достижимости без учета фазовых ограничений.