Систему (1), (2) будем называть регуляризуемой с помощью обратной линейной связи по выходу (2), если найдется $r \times m$ – матрица Q такая, что замыкание системы (1), (2) управлением $u(t) = Qy(t)$ приводит к регулярной системе

$$(D(p) - BQC)x(t) = 0,$$

т.е. у которой характеристическая функция $\delta(\lambda) = \det(D(\lambda) - BQC)$ является ненулевой.

На основании [1, 2] доказываемая следующая

Теорема 1. *В случае $d(\lambda) \equiv 0$ система (1), (2) с одним входом ($r = 1$) либо с одним выходом ($m = 1$) регуляризуема линейной обратной связью по выходу (2) тогда и только тогда, когда найдется такое λ_0 , что $CF(\lambda_0)B \neq 0$, где $F(\lambda)$ – присоединенная (союзная) матрица [3] к матрице $D(\lambda)$.*

Список литературы

1. Булатов В.И. Задачи модального управления. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Мн., 1981г.
2. Булатов В.И. Критерий регуляризуемости линейной связью по выходу систем управления с запаздыванием с одним входом. // Тез. докладов XV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения - 2013", Ч.1, 13-16 мая 2013г., г.Гродно, Беларусь. С.74.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988г.

К ТЕОРЕМЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ж.-К. Вивальда¹, Б.С. Калитин²

¹ Департамент математики университета им. П. Верлена, 57045 Мец, Франция
jean-claude.vivalda@inria.fr

² Белгосуниверситет, экономический факультет
ул. К. Маркса 31, 220030 Минск, Беларусь
Kalitine@yandex.ru

В работе А.М. Ляпунова [1] наряду с основополагающими концепциями теории устойчивости движения предложен метод исследования задач неустойчивости с использованием вспомогательных функций (функций Ляпунова). Сформулированы две теоремы о неустойчивости, которые нашли практическое применение в решении ряда задач моделей естествознания. Эти теоремы неоднократно обобщались учеными-исследователями прямого метода и получили свое дальнейшее развитие в работах Н.Г. Четаева, Н.Н. Красовского, В.И. Зубова,

В.М. Матросова, А.А. Андреева, А.А. Косова, С.В. Павликова, а также в работах авторов [2], [3]. Достаточно подробный анализ достижений этого направления исследований изложен в [4, 5].

В данной работе предлагается два варианта развития теорем Н.Н. Красовского [4] и А.С. Андреева [6] о неустойчивости и их обобщение на случай неавтономных систем, когда множество нулей производной функции Ляпунова может содержать положительные полутраектории.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\|x\|$ – норма в этом пространстве, D – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат, $\mathbb{R}^+$ – множество неотрицательных чисел прямой $\mathbb{R}$, B_r – шар с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^n$ и радиусом $r > 0$, а $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ – функция расстояния. Рассмотрим систему, определяемую обыкновенным неавтономным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $f : D \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывная, локально липшицева по x функция, причем $f(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$. Пусть $x(x_0, t_0, t)$ – решение системы (1) с начальным условием $x(x_0, t_0, t_0) = x_0$, определённое на некотором интервале времени t при $t \geq t_0$. Пусть $\mathbf{F} = \{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}^+\}$, $f_\tau(y, t) = f(y, t + \tau)$, означает пространство сдвигов функции f , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из $D \times \mathbb{R}^+$ и $\bar{\mathbf{F}}$ замыкание $\mathbf{F}$ в такой топологии. Для каждой функции $g \in \bar{\mathbf{F}}$ уравнение

$$\dot{y} = g(y, t) \quad (2)$$

называется предельным уравнением для (1).

Если $\mathbf{V}$ – класс функций $V : D \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченных на каждом множестве $K \times \mathbb{R}^+$, где K – компактное подмножество D и равномерно непрерывных по $x \in K$ на $K \times \mathbb{R}^+$, то аналогично определяется класс $\bar{\mathbf{V}}$ предельных функций для $\mathbf{V}$. Пусть имеем пару функций $(f, V) \in \bar{\mathbf{F}} \times \bar{\mathbf{V}}$ такую, что $f(x, t + t_k) \rightarrow g(x, t)$ и $V(x, t + t_k) \rightarrow v(x, t)$ при $t_k \rightarrow +\infty$. В этом случае следуя [6, 7], пара (g, v) называется предельной парой для пары (f, V) , соответствующей последовательности (t_k) .

Решение $x = 0$ системы (1) называется *неустойчивым*, если можно указать $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}^+$ такие, что для всех достаточно малых $\delta > 0$ существует состояние $x_0 \in B_\delta$ и момент времени $t^* > t_0$, для которых $\|x(x_0, t_0, t^*)\| \geq \varepsilon$. Пусть $\mathbf{K}$ означает множество непрерывных строго возрастающих функций Хана $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $a(0) = 0$.

Теорема 1. Пусть существуют окрестность U начала координат, непрерывно дифференцируемая функция $V \in \mathbf{V}$ и функция $a \in \mathbf{K}$

такие, что выполняются следующие условия:

1. $|V(x, t)| \leq a(\|x\|) \forall (x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$;
2. $\forall \alpha > 0 \exists p \in B_\alpha, p \neq 0$ и $\exists \tau \geq 0 \in \mathbb{R}^+$ такие, что $V(p, t_0) > 0$;
3. $\dot{V}(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$;
4. если существует предельная пара $(g, v) \in \bar{\mathbf{F}} \times \bar{\mathbf{V}}$ и решение $y(p, t_0, t), p \neq 0$, системы (2), для которых $v(p, t_0, t), t = v(p, t_0) \forall t \geq t_0$, то при $t \rightarrow +\infty$ имеет место одно из следующих двух условий: $y(p, t_0, t) \rightarrow 0$ или $y(p, t_0, t) \rightarrow FrU$.

Тогда точка покоя $x = 0$ системы (1) неустойчива.

Теорема 2. Пусть для системы (1) существуют окрестность U точки $x = 0$, непрерывно дифференцируемая функция $V \in \mathbf{V}$ и функция $c \in \mathbf{K}$ такие, что выполняются следующие условия:

1. $V(0, t) = 0 \forall t \geq 0$ и функция $V(x, t)$ ограничена на множестве $U \times \mathbb{R}^+$;
2. $\forall \alpha > 0 \exists p \in B_\alpha, p \neq 0$ и $\exists t_0 \in \mathbb{R}^+$ такие, что $V(p, t_0) > 0$;
3. решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $Y_0 = \{x \in U : V(x, t) = 0 \forall t \geq 0\}$;
4. $\dot{V}(x, t) \geq c(d(Y_0, x)) \forall (x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$.

Тогда точка покоя $x = 0$ системы (1) неустойчива.

Список литературы

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Kalitin B., Vivalda J.-C. Theorem of Unstability // Вестник Белорус. ун-та. Сер. 1. Физ., Мат., Информ. 2008. №1. С. 55–58.
3. Калитин Б.С. Неустойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова // Математические заметки. 2009. Т. 85. Вып. 3 март. С. 382–394.
4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
5. Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А. и др. Метод векторных функций ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
6. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 225–232.
7. Косов А.А. О глобальной устойчивости неавтономных систем I // Изв. Вузов. математика. 1997. № 7 (422). С. 28–35.