Вычисление (3) назовем текущей задачей оптимального наблюдения. Решение задачи (4) называется экстремальным начальным состоянием в позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$.

Пусть $Y_\tau(\cdot)$ – множество всех сигналов $y_\tau(\cdot)$, которые могут быть записаны к моменту времени τ.

Определение 3. *Функцию*

$$\alpha(\tau, y_\tau(\cdot)),\ y_\tau(\cdot) \in Y_\tau(\cdot),\ \tau \in T_h, \tag{5}$$

будем называть позиционным решением задачи оптимального наблюдения (4), а ее построение – синтезом оптимальной системы наблюдения.

Наблюдение объекта с помощью позиционного решения (5) осуществляется по алгоритму, описанному в [1]-[4]. Для иллюстрации метода рассмотрены динамические системы 4-го и 8-го порядков с двухмерными сигналами измерительного устройства.

Список литературы

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Поясок Е.И.* Оптимальное наблюдение в реальном времени линейного динамического объекта // Доклады РАН. 2013. Т. 448. № 2. С. 145-148.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Синтез оптимальных управлений для динамических систем при неполной и неточной информации об их состояниях // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1995. Т. 211. С. 140-152.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Дмитрук Н. М.* Оптимизация многомерных систем управления с параллелепипедными ограничениями // Автоматика и телемеханика 2002. №3. С. 3-26.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. Мн.: Университетское, 1984. 214 с.

ОПТИМАЛЬНОЕ НАСЫЩАЕМОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫМ ОБЪЕКТОМ

В.С. Воронков

ул. Ильинская 65, 603000 Нижний Новгород, Россия
vic_voronkov@mail.ru

Введение. Разработка методов оптимального управления с целью стабилизации неустойчивых объектов берет начало с работ Р. Калмана и А.М. Летова [1, 2]. В этих работах используется линейная математическая модель полностью управляемого и наблюдаемого объекта, что позволяет найти оптимальное управление как линейную обратную связь по переменным состояния. Оптимальность управления определяется условием минимизации квадратичного функционала от переменных состояния и функций управления. Такая постановка задачи оптимального управления часто называется линейно-квадратичной оптимизацией. Ее название "аналитическое конструирование регуляторов предложенное А.М. Летовым [2], используется реже, поскольку не всегда удается получить аналитическое выражение оптимального управления. Учет реально существующих ограничений управления приводит: во-первых, к усложнению поиска условий минимума квадратичного функционала; во-вторых, к дополнительному критерию оптимальности управления в виде максимума области притяжения стабилизируемого состояния равновесия в пространстве состояний замкнутой системы. Этот дополнительный критерий назван Г.А. Степаньянцем критерием оптимальности ограниченного управления по устойчивости [3]. Критерий оптимальности ограниченного управления по устойчивости, как показано в [4], может быть связан с экстремальностью функции Ляпунова, обычно используемой для оценки области устойчивости в пространстве состояний нелинейных систем [5]. В отличие от машинно-ориентированных методов предлагается аналитическое решение задачи оптимизации ограниченного управления как по квадратичному критерию, так и по критерию оптимальности по устойчивости. Это решение получается выбором функции Ляпунова в виде квадратичной формы, матрица постоянных коэффициентов которой является решением матричного уравнения Риккати задачи линейно-квадратичной оптимизации, соответствующей объекту с одной неустойчивой переменной и квадратичному функционалу, содержащему только квадрат функции управления. Приводятся примеры аналитического конструирования регуляторов на основе оптимального насыщаемого управления неустойчивыми объектами.

1. Постановка задачи и предлагаемый подход к ее решению. Рассматривается линейный неустойчивый объект

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,\ x \in R^n,\ u \in R, \tag{1}$$

с единственным положительным значением $\lambda_1 > 0$ матрицы A. На единственный вход объекта подается линейная обратная связь по состоянию $\sigma(x)$, формирующая насыщаемое управляющее воздействие $u = sat[\sigma(x)]$. Ограничения по входу задается условием $|u| \leq 1$. Точные границы максимальной области притяжения стабилизируемого состояния равновесия замкнутой системы определяются областью ее управляемости и являются гиперплоскостями, соответствующими уровнями ограничений управления $u = \pm 1$. Функция Ляпунова в виде квадратичной формы $V = x^T K x$ задает в n-мерном пространстве состояний поверхность эллипсоида $E(K, \rho)$, ориентация которого зависит от определенно положительной матрицы K, а размеры — от константы ρ в уравнении $V(x) = \rho$. Функция Ляпунова дает оценку снизу области притяжения стабилизируемого состояния равновесия в виде эллипсоида такого размера ρ, при котором для $\forall x \in E(K, \rho)$ выполняется условие

$$\frac{dV}{dt} = x^T(A^T K + KA)x - x^T K B sat(2B^T K x) \leq 0. \qquad (2)$$

Условие максимум ρ находится из условий касания эллипсоида любой из сепаратрисных гиперплоскостей неустойчивых состояний равновесия, соответствующих ограничениям управления. Выбор матрицы K предлагается делать из решения алгебраического уравнения Риккати, матрицы которого стоят в правой части уравнения (2), если вместо функции насыщения использовать линейную обратную связь $u = -2B^T K x$. Такая обратная связь соответствует минимуму квадратичного критерия от квадрата функции насыщаемого управления. Ориентация главных осей эллипсоида $E(K, \rho)$ в этом случае совпадает с собственными векторами матрицы A, а его максимальный размер $\rho_{\max} = 1/\lambda_1$ определяется допустимым отклонением по отклонением по неустойчивой переменной, соответствующей положительному собственном значению $\lambda_1 > 0$ матрицы . Допустимые отклонения по устойчивым переменным в этом случае становятся неограниченными, а эллипсоид вырождается в область управляемости, заключенной между сепаратрисными гиперплоскостями неустойчивых состояний равновесия.

Заключение. Таким образом, показана возможность аналитического решения задачи оптимизации насыщаемого управления неустойчивым объектом, которое является оптимальным как с точки зрения частного вида квадратичного критерия, так и с точки зрения критерия оптимальности по устойчивости. Математическое моделирование конкретных неустойчивых объектов показало возможность использование математической модели объекта для восстановления ненаблюдаемых переменных его состояния с целью минимизации числа датчиков в системе стабилизации.

Список литературы

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

2. *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления. М.:Наука, 1981.
3. *Степаньянц Г.А., Тарарощенко Н.С.* О структуре законов управления обеспечивающих асимптотическую устойчивость систем управления неустойчивым объектом // Докл. АН СССР, 1970, Т. 193, № 4, с. 774 - 776.
4. *Воронков В.С.* Экстремальная функция Ляпунова систем стабилизации неустойчивых объектов // Тезисы докл. Междунар. Семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"М.: ИПУ РАН, 2006, с.47-48.
5. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Р. Габасов, В.В. Альсевич, Д.В. Русакова

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики

пр. Независимости, 4, 220050 Минск, Беларусь

alsevichvv@mail.ru

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления системой с запаздыванием:

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) \longrightarrow \min, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \in T = [0, t^*], \tag{2}$$

$$x(t) = x_0(t), \quad t \in T^0 = [-h, 0),\ x(0) = x_0, \tag{3}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \tag{4}$$

где $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^r$, $t \in T$; $x_0(t), \quad t \in T^0$, — непрерывная функция; вектор $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и множество $U \in \mathbf{R}^r$ заданы; момент t^* фиксирован; функции $\varphi(x)$, $f(x, y, u)$ непрерывны по своим аргументам вместе с $\partial\varphi(x)/\partial x$, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$; $y(t) = x(t-h)$.

В отличие от традиционного случая, где обычно используются кусочно-непрерывные управляющие воздействия, задача (1)–(4) исследуется в классе дискретных управляющих воздействий.

Управляющее воздействие $u(t) \in U$, $t \in T$, называется *дискретным* (с периодом квантования $h_1 > 0$), если

$$u(t) \equiv u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h_1), \quad \tau \in T_{h_1} = \{0, h_1, 2h_1, ..., t^* - h_1\},$$

где $h_1 = t^*/N$, N — натуральное число. Дискретные управляющие воздействия отличаются от кусочно-непрерывных тем, что их точками разрыва могут быть только моменты множества T_{h_1}.

Дискретные управляющие воздействия естественны с прикладной точки зрения, поскольку при решении нетривиальных задач неизбежно использование вычислительных устройств дискретного действия.