вий оптимальности [2]. Если в канонической системе координат граница фазового ограничения параллельна оси абсцисс, то для доказательства оптимальности любого допустимого управления и соответствующей таектории, строится абсолютно непрерывная сопряженная функция. В противном случае при условии выхода траектории на границу сопряженная функция имеет скачек.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2011-2015 гг. (шифр задания "Конвергенция 1.3.02").

Список литературы

1. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1966.
2. *Гончарова М.Н.* Достаточные условия оптимальности в задаче быстродействия. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 5. С. 53–61.

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И.В. Гребенникова, А.Г. Кремлев

Уральский федеральный университет, Мира 19, 620002 Екатеринбург, Россия
giv001@mail.ru

1. Постановка задачи. Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$dx(t)/dt = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t,\mu)u(t), \quad (1)$$
$$\mu dy(t)/dt = A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t,\mu)u(t),$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$; $x \in R^n$, $y \in R^m$; $u \in R^r$ — управление. Начальное состояние системы (1) $x(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \le t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \le t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Управление $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае

$$P = \{u(\cdot) \mid \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{u}'(\mathrm{t})\mathrm{R}(\mathrm{t})\mathrm{u}(\mathrm{t})dt \leq \lambda^2\}, \lambda = const > 0, \tag{2}$$

$R(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица с непрерывными элементами; штрих — знак транспонирования.

Рассматривается минимаксная задача управления [1]: среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot)\in P} J(u(\cdot)), \tag{3}$$
$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0\in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \varphi\big(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))\big),$$

где $\varphi(\cdot)$ заданная выпуклая функция (с конечными значениями); $z' = (x', y')$, $z\big(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)\big)$, $t \in T$ — решение системы (1), исходящих из $Z_0 = X_0 \times Y_0$ при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$. Выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Оптимальное управление $u^0(\cdot, \mu)$ и величина $\varepsilon^0(t_1, \mu)$ зависят от параметра μ. Однако эти характеристики при $\mu \to +0$ могут не сходиться [2] к соответствующим решениям задачи (3) для вырожденной системы, полученной из (1) при $\mu = 0$. Поэтому для построения оптимального решения важно правильно выбрать начальную асимптотику. Аппроксимация оптимального решения при ограничениях (2) существенно зависит [2] от вида разложения матрицы $B_2(t, \mu)$ по параметру μ $(0 < \mu \leq \mu_0)$.

Проведем исследование для случая $B_1(t, \mu) = B_1(t)$, $B_2(t, \mu) = \sqrt{\mu} B_2(t)$.

В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы, предложенные А.Г. Кремлевым в работе [3], но при отсутствии запаздывания и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных пременных, в виде равномерно сходящейся последовательности [2]. Разрешимость исходной задачи управления определяется рядом требований [2].

2. Аппроксимация решения задачи управления. Вычисляя в соответствии с [2], при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, имеем:

$$\varepsilon^0(t_1) = \varepsilon^{(0)}(t_1) + o(1),$$

$$\varepsilon^{(0)}(t_1) = \max\{\chi^{(0)}(p,q) \mid p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(0)}(p^{(0)}, q^{(0)}),$$

$\chi^{(0)}(p,q) = -h_0^{**}(p,q) - \lambda\big(\sigma_0(p,q)\big)^{1/2},$

$\sigma_0(p,q) = \int\limits_{t_0}^{t_1} w'(\tau,p,q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p,q)d\tau +$

$+ \int\limits_0^{\infty} q'\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1,\mu)R^{-1}(t_1)B_2'(t_1,\mu)\Phi_0'[t_1,s]qds,$

$h_0(p,q) = \varphi^*(p,q) - \rho(w'(t_0,p,q) \mid X_0) -$

$- \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(w'(\tau,p,q)G_0(\tau) \mid \Psi(\tau-h))d\tau,$

$w'(\tau,p,q) = s'(t_1,p,q)X[t_1,\tau] - q'A_{22}^{-1}(t_1)G_2(t_1)X[t_1-h,\tau],$

$s'(t_1,p,q) = p' - q'A_{22}^{-1}(t_1)A_{21}(t_1),$

где $G_0(t) = G_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_2(t)$, $X[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений вырожденной системы (система (1) при $\mu = 0$), причем $X[\tau,\tau] = E$, $X[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$; $\Phi_0[t_1,s]$ — фундаментальная матрица решений системы $d\Phi_0[t_1,s]/ds = \Phi_0[t_1,s]A_{22}(t_1)$, $\Phi_0[t_1,0] = E$; $\varphi^*(p,q)$ — функция, сопряженная к $\varphi(p,q)$; $h^{**}(p,q) = \overline{(co\, h)}(p,q)$ — замыкание выпуклой оболочки функции $h(p,q)$; $\rho(q|X)$ — опорная функция множества X на элементе q.

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(0)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(0)}(\tau) = \begin{cases} u^{(0)}(\tau), & t_0 \le \tau \le t_1 - \alpha(\mu), \\ (1/\sqrt{\mu})v^{(0)}\big((t_1-\tau)/\mu\big), & t_1 - \alpha(\mu) < \tau \le t_1, \end{cases}$$

где $\alpha(\mu) > 0,\ \alpha(\mu) = o(1),\ \alpha(\mu)/\mu \to +\infty$ при $\mu \to +0$;
$u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)}(\cdot)$ определяются условиями:
для почти всех $\tau \in [t_0, t_1]$

$$u^{(0)}(\tau) = -\lambda R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p^{(0)},q^{(0)})\big(\sigma_0(p^{(0)},q^{(0)})\big)^{-1/2};$$

для почти всех $s \ge 0$

$$v^{(0)}(s) = -\lambda R^{-1}(t_1)B_2'(t_1,\mu)\Phi_0'[t_1,s]q^{(0)}\big(\sigma_0(p^{(0)},q^{(0)})\big)^{-1/2}.$$

Теорема 1. [2] *Пусть* $0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 *достаточно мало,* $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ *доставляет оценку*

$$\varepsilon^0(t_1) = J\big(u^0(\cdot)\big) = J\big(u_\mu^{(0)}(\cdot)\big) + o(1).$$

Список литературы

1. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

2. *Гребенникова И.В.* Задача оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при интегральных квадратичных ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. вып 4. С. 3–11.
3. *Кремлев А.Г.* Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и Телемеханика. 1993. №. 9. С. 61–78.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОЦЕНИВАНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ

В.Ф. Губарев

Институт космических исследований НАНУ-ГКАУ
пр. Глушкова, 40, к. 4/1, 03680 Киев, Украина
v.f.gubarev@gmail.com

Введение. Для большинства задач оценивания и идентификации характерны две особенности. Первая состоит в том, что такие задачи относятся к классу обратных, а вторая касается исходных данных. Как правило, они формируются из измерений, которые содержат погрешности. Именно эти особенности при определенных условиях приводят к тому, что эти задачи становятся математически некорректно поставленными. Напомним, какие задачи считаем некорректно поставленными для операторного уравнения

$$Ax = u, \tag{1}$$

где A является непрерывным оператором, а обратный ему оператор A^{-1} во многих случаях оказывается не вполне непрерывным. Тогда при нахождении x по неточно заданной правой части будем иметь неустойчивые решения.

1. Задача оценивания. Пусть имеется линейный стационарный динамический объект

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k. \tag{2}$$

Считаем, что все собственные значения матрицы A лежат внутри единичного круга, т.е. система (2) устойчива. Ее состояние в произвольный момент времени N равно

$$x_N = A^N x_0 + \Omega_N u_{0:N}, \tag{3}$$

где $u_{0:N} = \left(u_{N-1}^T, \cdots, u_1^T, u_0^T\right)^T$, $\Omega_N = (B, AB, \ldots, A^{N-1}B)$.