

лярные числа позволяют оценивать практический ранг матрицы  $Y$ . Второе слагаемое соответствует малосущественному на уровне шумов сигнальному подпространству. Выделяемое подпространство первого слагаемого определяет аппроксимирующую модель системы. Его выбор следует делать так, чтобы получаемое решение было устойчивым, т.е. согласованным с погрешностью исходных данных. Полагаем  $Y_1 = Q_s = \Gamma_s$ . Тогда из  $\Gamma_s$ , представленного в (5), можно получить переопределенную систему линейных уравнений для нахождения  $A$

$$\Gamma_{1:s-1}A \approx \Gamma_{2:s}, \quad (8)$$

где  $\Gamma_{1:s-1}$  получается из  $\Gamma_s$  исключением блока  $CA^{s-1}$ , а  $\Gamma_{2:s}$  – исключением блока  $C$ .

Устойчивость получаемых решений определяется обусловленностью матрицы  $\Gamma_{1:s-1}$ . В работе обсуждаются различные способы согласованного с погрешностью выбора  $s$ .

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ И ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

М.И.Гусев

Институт математики и механики УрО РАН,  
ул. С.Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия  
gmi@imm.uran.ru

**Введение.** Доклад посвящен задаче о построения внешних оценок множества достижимости нелинейной управляемой системы в виде множеств уровня гладких функций. В рассматриваемой системе выделяются линейные подсистемы, для которых соответствующие функции считаются известными. В качестве таковых можно, например, выбирать квадратичные функции, применяя технику эллипсоидальных аппроксимаций множеств достижимости [1]. Оценки для траекторий нелинейной системы строятся при помощи модификации оценок для линейной подсистем. В основе предлагаемых конструкций лежат дифференциальные неравенства и принцип сравнения [2, 3]. Рассматривается также вопрос о приближенном построении множеств достижимости при наличии фазовых ограничений. Предлагается аналог метода внутренних штрафных функций, позволяющий приблизить данное множество множествами достижимости без учета фазовых ограничений.

# 1. Внешние оценки множеств достижимости и принцип сравнения

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t, x), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u = u(t) \in P$ ,  $P \subset \mathbb{R}^r$ ,  $x(t_0) = x^0 \in X^0$ . Множества  $X^0, P$  – компакты. Обозначим через  $G(\theta)$  множество достижимости системы (1) в момент времени  $\theta$ . Пусть  $G^0(\theta)$  – множество достижимости линейной системы  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$  при тех же ограничениях на управление и начальные состояния. Предположим, что  $G^0(\theta) \subset \{x : V(\theta, x)\} \leq 0$ , где  $V(t, x)$  – гладкая функция, удовлетворяющая дифференциальному неравенству

$$V_t(t, x) + \max_{u \in P} V'_x(t, x)(A(t)x + B(t)u) \leq 0, \quad (2)$$

где штрих означает транспонирование вектора. В качестве функций  $V(t, x)$  можно выбирать, например, квадратичные или линейные функции. Для производной  $\dot{V}$  в силу системы (1) имеет место неравенство  $\dot{V} \leq V'_x(t, x)f(t, x)$ . В предположении об ограниченности множеств уровня функции  $V$  определим  $g(t, \mu) = \max_{\{x: V(t, x) = \mu\}} \{V'_x(t, x)f(t, x)\}$  и рассмотрим решение уравнения (системы сравнения)  $\dot{U} = g(t, U)$  с начальным состоянием  $U(t_0) = U^0 \geq \max_{x^0 \in X^0} V(t_0, x^0)$ . Применение принципа сравнения к функциям  $V$  и  $U$  позволяет получить включение вида  $G(\theta) \subset \{x : V(\theta, x)\} \leq U(\theta)$  для множеств достижимости. При наличии нескольких оценочных функций  $V^i, i = 1, \dots, k$  в качестве внешней оценки можно взять пересечение множеств уровня. Оценки можно улучшить, если в качестве системы сравнения брать систему дифференциальных уравнений для вектор-функции  $U$ , положив  $g = (g_1, \dots, g_k)$ ,  $g_i(t, \mu_1, \dots, \mu_k) = \max_{\{x: V^i(t, x) = \mu_i, V^j(t, x) \leq \mu_j, j \neq i\}} \{V^{i'}_x(t, x)f(t, x)\}$  [4].

Другой способ построения внешних оценок может быть применен для многомерных систем, состоящих из подсистем простой структуры (например, линейных), связанных между собой нелинейными перекрестными связями, задаваемых ограниченными функциями. Для каждой из подсистем считается известной внешняя оценка области достижимости, представляемая в виде множества уровня некоторой гладкой функции удовлетворяющей дифференциальному неравенству. На основе оценок для подсистем строится оценка для области достижимости объединенной системы [5]. Метод получения оценок основан на конструкциях, аналогичных соответствующим построениям для векторных функций Ляпунова в теории устойчивости.

**2. Множества достижимости при наличии фазовых ограничений** Пусть дополнительно управляемая система стеснена фазовыми ограничениями, заданными в виде неравенств. Предлагается аналог метода штрафных функций, состоящий в замене исходной системы с фазовыми ограничениями вспомогательной системой без ограничений. Далее показано, что множество достижимости исходной системы может быть приближено изнутри множествами достижимости вспомогательных систем в хаусдорфовой метрике.

Будем рассматривать нелинейную управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (3)$$

при прежних ограничениях на управление и начальное состояние. Будем считать отображение  $(t, x, u) \rightarrow f(t, x, u)$  удовлетворяющим локальным условиям Липшица по  $(t, x)$  и непрерывным по  $u$ . Пусть фазовые ограничения для системы (1) заданы в виде  $g(t, x(t)) \leq 0$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , где  $g(t, x)$  – функция класса  $C^1$ , пусть  $G(\theta)$  – множество достижимости в момент времени  $\theta \in [t_0, t_1]$ , состоящее из точек в которые можно перевести точки  $X^0$  с соблюдением фазовых ограничений. Пусть  $k > 0$ . Определим множество

$$U_k(t, x) = \{u \in U : g_t(t, x) + g'_x(t, x)f(t, x, u) \leq -kg(t, x), \}$$

где  $g_t, g_x$  – градиенты функции  $g$  по  $t$  и  $x$ .

Будем далее предполагать выполненными следующие условия

А. Правая часть системы (1) удовлетворяет условиям подлинейного роста по  $x$ :

$$\|f(t, x, u)\| \leq C(1 + \|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U, \quad t \in [t_0, t_1].$$

В. Для всех точек  $(t, x)$ , в которых  $g(t, x) = 0$ , имеет место неравенство

$$g_t(t, x) + \min_{u \in U} g'_x(t, x)f(t, x, u) < 0. \quad (4)$$

Последнее условие обеспечивает слабую инвариантность фазовых ограничений относительно системы (1). При этом для любого начального состояния существует траектория системы (1), удовлетворяющая фазовым ограничениям, и значит  $G(\theta) \neq \emptyset$ . Справедливо следующее утверждение [6]

**Теорема 1.** Пусть  $f(t, x, u)$  локально липшицева по  $(t, x)$  и непрерывна по  $u$ , выполнены предположения А, В и  $g(t_0, x^0) < 0$  для

любых  $x^0 \in X^0$ . Тогда при достаточно больших  $k > 0$   $G_k(\theta) \neq \emptyset$ ,  $G_k(\theta) \subset G(\theta)$  и

$$h(G_k(\theta), G(\theta)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

где  $h$  — хаусдорфово расстояние между множествами.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-00261 и интегративного проекта УрО и СО РАН 12-С-1-1017.

## Список литературы

1. *Kurzhanski A. B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Birkhäuser, Boston, ser.SCFA., 1997.
2. *Дыхта В.А.* Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Оптимальное управление и динамические системы, Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прил. Тем.обзор, 110, ВИНТИ, М., 2006, с.76–108
3. *Куржанский А.Б.* Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления. // Труды института математики и механики УрО РАН, 2006, Т.12, № 1, с.173–183.
4. *Гусев М. И.* Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика, № 3, 2012, С.39-51
5. *Gusev M.I.* Estimates of Reachable Sets of Multidimensional Control Systems with Nonlinear Interconnections. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2, 2010, pp. S134–S146.
6. *Гусев М. И.* О методе штрафных функций в задаче построения множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 19, № 1, 2013, С.81–86

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Г.А. Гусейнзаде<sup>1</sup>, К.Б. Мансимов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт Кибернетики НАН Азербайджана  
Б.Вахабзаде 9, 1141 Баку, Азербайджан  
mansimov@front.ru

<sup>2</sup> Бакинский Государственный Университет  
З.Халилов 23, 1148 Баку, Азербайджан

Работа посвящена вопросу, связанному с представлением решений одного дифференциально-рекуррентного уравнения.