

Показано применение этих результатов в решении задач о стабилизации движений управляемых механических систем, в том числе, робототехнических.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 гг.» (Соглашение №14.В37.21.0373).

Список литературы

1. *Андреев А.С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // *АиТ.* 2009. № 4. С. 4–55.
2. *Hale J., Kato J.* Phase space for retarded equations with infinite delay // *FuEkvacioj.* 1978. V. 21 P. 11–41.
3. *Hino Y, Murakami S., Naito T.* Functional differential equations with infinite delay // *Lecture Notes in Math.* V. 1473. Springer-Verlag, 1991.

О ПОСТРОЕНИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

О.Г. Антоновская

НИИ прикладной математики и кибернетики Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского, Ульянова 10, 603005 Нижний Новгород, Россия
olga.antonovsckaja@yandex.ru

Введение. Метод функций Ляпунова [1] находит все более широкие приложения к анализу разнообразных свойств как непрерывных, так и дискретных динамических систем самой различной природы. Значение этого метода не исчерпывается возможностью установления факта устойчивости или неустойчивости исследуемой системы. Удачно построенная функция Ляпунова для нелинейной динамической системы позволяет решать такие прикладные задачи, как оценка регулируемой величины, оценка длительности переходного процесса, построение оценок областей притяжения [2] и т.д. Поэтому важное место в методе функций Ляпунова занимает проблема построения подходящей функции Ляпунова.

При изучении поведения нелинейных динамических систем, допускающих линеаризацию вблизи равновесных состояний функцию Ляпунова часто ищут в классе положительно определенных квадратичных форм, исходя из того условия, что построенная квадратичная форма является функцией Ляпунова для соответствующей линеаризованной

системы [3]. А так как одной из основных является проблема расширения областей приложения метода функций Ляпунова, возникающая при решении конкретных задач, могут решаться вопросы построения квадратичной функции Ляпунова с некоторыми свойствами, определяемыми особенностями исходной задачи. Например, строится квадратичная функция Ляпунова, матрица которой имеет заданный спектр [4] или отношение ее наибольшего и наименьшего собственных чисел минимально [5], [6].

При решении прикладных динамических задач, когда интерес представляют не только качественные, но и количественные характеристики системы, возникает необходимость использования ограничений на свойства функции Ляпунова, позволяющих получать необходимые оценки с достаточной точностью [7]. В частности при численно-аналитическом оценивании асимптотически устойчивых множеств [2], [7] с помощью определения знака первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова $V(x)$ на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ существенным является такой выбор ее параметров, при котором выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ ($\Delta V(x) < 0$) для линейной системы обеспечивается с заданным [8] (в том числе максимальным [9], [10]) запасом.

1. О возможном запасе знакоотрицательности первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова.
Для системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

в случае, если корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ имеют отрицательные действительные части, максимальное значение первой производной квадратичной функции Ляпунова

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}x_i x_j \quad (K_{ij} = K_{ji}), \quad (2)$$

в силу системы (1) на заданной поверхности уровня $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V_0$ может быть равно δV_0 ($2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i \leq \delta < 0$). Параметры K_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) функции Ляпунова (2), соответствующей каждому значению δ , определяются из явных соотношений [8].

Для линейного точечного отображения

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

в случае, если корни $z_1, z_2, \dots, z_n$ характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ лежат внутри круга единичного радиуса, максимальное значение первой разности в силу (3) на заданной поверхности уровня $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V_0$ может быть равно δV_0 ($\max_i \{|z_i|^2 - 1\} \leq \delta < 0$). Параметры K_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) функции Ляпунова (2), соответствующей каждому значению δ , определяются из явных соотношений [8].

2. Условно-экстремальная функция Ляпунова. Применение численно-аналитических методов при исследовании динамических систем методом точечных отображений естественным образом приводит к необходимости построения функции Ляпунова, наиболее удобной для решения задачи определения длительности переходных процессов. В качестве подобной функции предлагается выбрать квадратичную функцию Ляпунова, гарантирующую минимальность числа итераций линеаризованного в окрестности неподвижной точки точечного отображения до попадания внутрь поверхности уровня, размеры которой определяются особенностями критерия окончания переходного процесса в системе. При этом предполагается равенство минимума модуля первой разности на поверхности уровня заданному числу. Ранее, в работе [11] рассматривалась задача построения квадратичной функции Ляпунова, гарантирующей минимальность числа итераций до попадания траектории линеаризованного отображения в заданную полосу (при условии, что в дальнейшем она не покинет этой полосы). Такая функция Ляпунова была названа условно-экстремальной.

Список литературы

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
3. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
4. Хусаинов Д.А., Юнькова Е.А. Об одном методе нахождения решения матричного уравнения Ляпунова с заданным спектром // Укр. мат. журн. 1984. Т. 36. № 4. С. 528–531.
5. Комаров Н.А., Хусаинов Д.А. Некоторые замечания об экстремальной функции Ляпунова // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35. № 6. С. 750–753.
6. Сарыбеков Р.А. Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18. № 5. С. 1159–1167.

7. *Косякин А.А., Шамриков Б.М.* Колебания в цифровых автоматических системах. М.: Наука, 1983.
8. *Antonovskaya O.G., Goryunov V.I.* On quadratic Lyapunov function for applied dynamic problems // 9-th IFAC Symposium Advances in Control Education. Nizhny Novgorod, Russia, 2012. P. 484–486.
9. *Антоновская О.Г.* О максимальном ограничении первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1562–1563.
10. *Антоновская О.Г.* Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. вузов. Математика. 2004. № 2(501). С. 19–23.
11. *Антоновская О.Г., Горюнов В.И.* О построении и применении условно-экстремальной функции Ляпунова в задачах исследования быстродействия систем методом точечных отображений // Нелинейные колебания механических систем. VII Всероссийская научная конференция. Труды. Н.Новгород. 2005. С. 35–37.

К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЯМИ В СИСТЕМАХ С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И УСЛОВНО- ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов

НИИ прикладной математики и кибернетики Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского, Ульянова 10, 603005 Нижний Новгород, Россия
olga.antonovskaja@yandex.ru, pmk@unn.ac.ru

Введение. При построении систем управления автовращательными и автоколебательными процессами, обладающими простой технической реализацией за счет использования в качестве перестраиваемого параметра показателя счетчика числа колебаний выходной координаты управляемого объекта и создания на этой основе динамически изменяющейся во времени последовательности импульсов с последующим сравнением ее с периодической последовательностью эталонных импульсов, приходится иметь дело с математическими моделями (ММ) систем управления с широтно-импульсной модуляцией и запоминанием сигнала управления [1].

Обратно-пропорциональный характер зависимости фазы появления выходных импульсов счетчика числа колебаний и частоты колебаний управляемой координаты объекта приводит к нелинейной широтно-импульсной модуляции процесса управления [2] и поэтому в каждом конкретном случае требует учета специфики постановки задачи