Выводы. Управление $\bar{u}_i \in U$, $i \in I$ в обоих вариантах определяется неоднозначно, однако любое из них можно взять в качестве асимптотического управления исходной задачи, на основании которого построить соответствующую траекторию $\bar{x}_i \in D_x$, $\bar{y}_i \in D_y$, которая при $i \in [kh,\ (k+1) \cdot h)$ удовлетворяет оценкам

$$\|w_k - \bar{x}_i\| \leq \eta.$$

Приведено обоснование алгоритма и полученной оценки. Рассмотрен пример построения асимптотического управления заданной системы по известному управлению усредненной задачи, подтверждающий сформулированные выводы.

Список литературы

1. *Плотников В.А., Плотникова Л.И., Яровой А.Т.* Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления // Нелинейные колебания. 2004. Т. 7. № 2. С. 241–254.
2. *Бойцова И.А.* Метод усреднения в системах дискретных уравнений с быстрыми и медленными переменными // Вест. ОНУ. Математика и механика. 2008. Том 13. Вып. 18. С. 7–22.
3. *Бойцова И.А.* Численно-асимптотический метод решения дискретных задач оптимального управления с быстрыми и медленными переменными // Вест. БГУ. Сер. I. 2011. № 1. С. 105–110.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В.Т. Борухов, Г.М. Заяц

[1] Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
{borukhov,zayats}@im.bas-net.by

Введение. В докладе представлена задача идентификации входного сигнала (временных компонент источника) квазилинейной динамической системы (ДС) гиперболического типа по данным выходного сигнала. Для решения данной задачи примененяется метод обратных динамических систем [1, 2]. Построение ДС обратной исходной ДС основано на применении аддитивного сдвига (калибровки) состояния ДС относительно источника [2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу восстановления входных данных для квазилинейной динамической системы вход-состояние-выход (обозначим ее символом Σ_τ) гиперболического типа

$$\tau \left(c(T)T_t\right)_t + c(T)T_t = \left(\lambda(T)T_x\right)_x + \mu_b u(t) + \tau\mu_b \dot{u}(t), \qquad (1)$$

$$T(0,t)=g_1(t),\;\; T(l,t)=g_2(t),\;\; T(x,0)=T_0(x),\;\; T_t(x,0)=T_1(x), \quad (2)$$

$$y(t)=\int\limits_0^l T(\xi,t)d\mu_p, \quad t\in[0,t_f], \tag{3}$$

где пара $(T(\cdot,t),T_t(\cdot,t))$ – состояние ДС в момент времени t, $u(t) = colon\,(u_1(t),...,u_m(t))$ – входной сигнал системы, $y(t) = colon\,(y_1(t),...,y_m(t))$ – выходной сигнал, $c(T)$, $\lambda(T)$ – абсолютно непрерывные строго положительные функции, τ – положительный параметр. Компоненты вектор-строки

$$\mu_b=[\mu_{b1},...,\mu_{bm}] \tag{4}$$

и вектор-столбца

$$\mu_p=colon\,[\mu_{p1},...,\mu_{pm}] \tag{5}$$

являются мерами Стильтьеса на отрезке $[0,l]$. Таким образом, для произвольной непрерывной функции $g(x)$ определены интегралы

$$\int\limits_0^l g(\xi)d\mu_b:=\int\limits_0^l g(\xi)db(\xi), \quad \int\limits_0^l g(\xi)d\mu_p:=\int\limits_0^l g(\xi)dp(\xi),$$

где $db(\xi) = [db_1(\xi),...,db_m(\xi)]\,, dp(\xi) = colon\,[dp_1(\xi),...,dp_m(\xi)]\,,$ $b_i(\cdot)$, $p_i(\cdot)\in BV[0,l]$, $i=\overline{1,m}$, ($BV[0,l]$ – пространство вещественных на $[0,l]$ функций с ограниченной вариацией).

Задача восстановления источника состоит в следующем: по данным $y(t)$, $\forall t\in[0,t_f]$, выходного сигнала ДС Σ_τ определить данные $u(t)$, $\forall t\in[0,t_f]$, входного сигнала.

Система уравнений (1), (2) описывает процессы теплопереноса с учетом конечной скорости распространения тепла. Параметр τ можно интерпретировать как время релаксации теплового потока [3, 4]. Учет параметра τ важен, например, при описании быстропротекающих тепловых процессов, индуцированных импульсным лазерным излучением [5, 6]. Компоненты вектор-строки (4) можно интерпретировать как пространственные моды, характеризующие плотность источника тепла, а компоненты вектора $u(\cdot)$ – как изменяющиеся во времени амплитуды таких мод.

Соотношения (3), (5) описывают способ измерения первой компоненты вектора состояний ДС Σ_τ.

2. Обратная ДС. Дифференциалы db, dp перепишем в "поточечной" форме

$$db = b'(x)dx, \quad dp = p'(x)dx,$$

где $b'(x) := \frac{db}{dx}$, $p'(x) := \frac{dp}{dx}$ – обобщенные производные функций $b(x)$, $p(x)$.

Теорема 1. *Пусть существует и обратима матрица*

$$\mathcal{D} := \int\limits_0^l p'(x)b'(x)dx.$$

Тогда обратная ДС Σ_τ^{-1} имеет вид

$$\begin{gathered}\tau w_{tt} + w_t = \left(\lambda\left(w - b'\mathcal{D}^{-1}\int\limits_0^l p'(x)w(x,t)dx + b'\mathcal{D}^{-1}y(t)\right)\times\right.\\ \left.\times\left(w - b'\mathcal{D}^{-1}\int\limits_0^l p'(x)w(x,t)dx + b'\mathcal{D}^{-1}y(t)\right)_x\right)_x,\end{gathered} \tag{6}$$

$$w(0,t) - b'(x)\mathcal{D}^{-1}\left(\int\limits_0^l p'(x)w(x,t)dx - y(t)\right)|_{x=0} = g_1(t), \tag{7}$$

$$w(l,t) - b'(x)\mathcal{D}^{-1}\left(\int\limits_0^l p'(x)w(x,t)dx - y(t)\right)|_{x=l} = g_2(t), \tag{8}$$

$$w(x,0) = T_0(x), \quad w_t(x,0) = T_1(x), \tag{9}$$

$$u(t) = -\mathcal{D}^{-1}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int\limits_0^l p'(x)w(x,t)dx + y(t)\right).$$

Таким образом, обратная задача восстановления изменяющихся во времени компонент источника сводится к прямой начально-краевой задаче (7)-(9) для нагруженного квазилинейного уравнения (6) гиперболического типа. Примеры численного решения таких задач для параболической ДС Σ_0 приведены в работе [2]. В докладе рассмотрены примеры численного моделирования задачи восстановления источников для гиперболической ДС Σ_τ.

Список литературы

1. *Борухов В.Т., Гайшун И.В., Тимошпольский В.И.* Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики. Минск, 2009.
2. *Борухов В.Т., Заяц Г.М.* Обратимость квазилинейных параболического типа динамических систем вход-состояние-выход // Труды 6-й Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений": в двух томах. Т.2 - Дифференциальные уравнения. Минск, Институт математики НАН Беларуси. 2012. С.19–24.
3. *Cattaneo C.* A form of heat conduction equation which eliminate the paradox of instantaneous propogation // Compte Rendus. 1958. Vol. 247. P. 431–433.
4. *Лыков А.В.* Некоторые проблемные вопросы теории тепломассопереноса. В сб. "Проблема тепло-и массопереноса". Минск: Наука и техника, 1976. С. 9–82.
5. *Al-Khairy R.T., Al-Ofey Z.M.* Analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for moving semi-infinite medium under the effect of time-dependent laser heat sourse // Journal of Appl. Mathematics. 2009, Article ID 604695, 18 pages.
6. *Chen Z.T., Hu K.Q.* Thermo-elastic analysis of a craced half-plane under a thermal shock impact using the hyperbolic heat conduction theory //Journal of thermal stresses. 2012. Vol.35, Issue 4. P. 342–362.

УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРИЗИРУЕМОСТИ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИХ ОПЕРАТОРНУЮ ЗАПИСЬ

В.И. Булатов

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

boulatovl@bsu.by

Рассмотрим стационарную систему

$$D(p)x(t) = Bu(t) \tag{1}$$

с r-мерным управлением (входом) $u(t)$, n-вектор-траекторией $x(t)$ и m-мерным выходом

$$y(t) = Cx(t). \tag{2}$$

Здесь $p = \dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования; $D(\lambda) - n \times n$ – матрица, элементами которой являются целые функции комплексной переменной λ; B и C – соответственно $n \times r$ и $m \times n$ – матрицы.

Система (1), (2) считается регулярной, если ее характеристическая функция $d(\lambda) = \det D(\lambda)$ является ненулевой. В случае, когда $d(\lambda) \equiv 0$ возникает задача регуляризируемости системы (1), (2) с помощью, например, обратной линейной связи по выходу (2).