with the initial condition $x(0) = x_0$.

Based on stated above considerations we construct the following algorithm to solution the problem (1)-(3).

1. Construct $F(t), G(t), v(t),\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ q,\ Q(t),\ C(t)$.
2. Determine the functions of the matrices $S(t),\ N(t)$ and $\omega(t)$ by solving the system of equations (6)
3. Determine $n(t)$ and $W(t)$ from the system equations (7)
4. Find $x(0)$ and γ by solving the system of algebraic equations (8)
5. Determine $u(t)$ by the formula (9)
6. Find the unknowns $x(t)$ from the system (10) provide that $x(0) = x_0$.

References

1. *Bryson A.E., Ho Yu-Chi,* Applied Optimal Control Optimization, Estimation and Control, London: Waltham, 1972, 412 p.

УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ТЕРМИНАХ НЕСОБСТВЕННЫХ ОБОБЩЕННЫХ ЭКЗОСТЕРОВ

М.Э. Аббасов

Санкт-Петербургский Государственный Университет,

Университетская наб. 7–9, С.-Петербург, Россия

abbasov.majid@gmail.com

Введение. В работах В. Ф. Демьянова, А. М. Рубинова, Б. Н. Пшеничного [1–5] были введены понятия нижнего и верхнего экзостера. Оказалось, что условия минимума наиболее органично описываются с помощью верхнего экзостера, а максимума – нижнего. Поэтому верхний экзостер был назван собственным для задачи на минимум (несобственным для задачи на максимум), а нижний экзостер – собственным для задачи на максимум (несобственным для задачи на минимум). Данная работа посвящена получению условий экстремума в терминах несобственного обобщенного экзостера, обобщающих условия, полученные В. Ф. Демьяновым , В. А. Рощиной, М. Э. Аббасовым [6–10].

Обобщенные экзостеры – это семейства выпуклых компактов, позволяющие представлять главный член приращения функции в исследуемой точке в $\inf\sup$-м либо $\sup\inf$-м виде, причем верхний обобщенный экзостер используется для первого представления, а нижний – для второго. Использование обобщенных экзостеров позволяет расширить класс рассматриваемых функций по сравнению с классом функций, которые можно исследовать с помощью экзостеров.

Пусть $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, и имеет место разложение

$$f(x+g) = f(x) + h_x(g) + o_x(g). \tag{1}$$

В (1) $o_x(g)$ удовлетворяет одному из условий:

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{o_x(\alpha g)}{\alpha} = 0 \quad \forall\, g \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

либо

$$\lim_{||g||\to 0} \frac{o_x(g)}{||g||} = 0 \quad \forall\, g \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

При справедливости условия (2) и п.о. $h_x(g)$ необходимым условием минимума является $h(g) \geq 0\ \forall g \in \mathbb{R}^n$, а $h(g) \leq 0\ \forall g \in \mathbb{R}^n$ – необходимым условием максимума.

Если выполнено условие (3) и по-прежнему, $h_x(g)$ – п.о., то $h(g) > 0\ \forall g \in \mathbb{R}^n$ – необходимое и достаточное условием строгого минимума, а $h(g) < 0\ \forall g \in \mathbb{R}^n$ – строгого максимума.

Если справедливо представление $h_x(g) = \inf\limits_{C\in E^*(x)} \sup\limits_{v\in C}(v,g)$, где $E^*(x)$ – семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, а $o_x(g)$ удовлетворяет (2), говорят, что $E^*(x)$ – обобщенный верхний экзостер в смысле Дини функции f в точке x; если справедливо (3) то – в смысле Адамара.

Когда справедливо представление $h_x(g) = \sup\limits_{C\in E_*(x)} \inf\limits_{v\in C}(v,g)$, где $E_*(x)$ – семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, а $o_x(g)$ удовлетворяет (2), говорят, что $E_*(x)$ – обобщенный нижний экзостер в смысле Дини функции f в точке x; если справедливо (3) то – в смысле Адамара.

1. Основные результаты. Пусть $\mathbb{S} = \left\{ g \in \mathbb{R}^n \middle|\ ||g|| = 1 \right\}$.

Теорема 1. *Для того чтобы*

$$h(g) = \sup_{C\in E_*} \inf_{v\in C}(v,g) \geq 0 \ \ \forall g \in \mathbb{S}, \tag{4}$$

где E_* – семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $g \in \mathbb{S}^n$ выполнялось условие

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon \in E_* :\ (v,g) \geq -\varepsilon \ \ \forall v \in\ C_\varepsilon. \tag{5}$$

Замечание 1. Если необходимое условие максимума из теоремы 1 не выполнено, то

$$\exists \overline{g} \in \mathbb{S}\ \exists \overline{\varepsilon} > 0: \ \forall C \in E_* \ \exists v_\varepsilon \in C \ \ (v_\varepsilon, \overline{g}) < -\overline{\varepsilon}.$$

Любое такое направление $\overline{g}$ есть направление спуска.

Теорема 2. *Для того чтобы* $h(g) = \inf\limits_{C \in E^*} \sup\limits_{v \in C} (v, g) \leq 0$ *для любого* $g \in \mathbb{S}$, *где* E^* *– семейство выпуклых множеств в* $\mathbb{R}^n$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $g \in \mathbb{S}$ *выполнялось условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C_\varepsilon \in E^*: \ (v, g) \leq \varepsilon \ \ \forall v \in C_\varepsilon.$$

Замечание 2. Если необходимое условие максимума из теоремы 2 не выполнено, то

$$\exists \overline{g} \in \mathbb{S}\ \exists \overline{\varepsilon} > 0: \ \forall C \in E^* \exists v_\varepsilon \in C \ \ (v_\varepsilon, \overline{g}) > \overline{\varepsilon}.$$

Любое такое направление $\overline{g}$ есть направление подъема.

Для условия строго экстремума справедливы следующие результаты:

Теорема 3. *Для того чтобы*

$$h(g) = \sup_{C \in E_*} \inf_{v \in C} (v, g) > 0 \ \ \forall g \in \mathbb{S}, \tag{6}$$

где E_* *– семейство выпуклых множеств из* $\mathbb{R}^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists \widetilde{\varepsilon} > 0 : \forall g \in \mathbb{S} \ \exists C_g \in E_*, \ (v, g) > \widetilde{\varepsilon} \ \ \forall v \in cl\ C_g. \tag{7}$$

Теорема 4. *Для того, чтобы*

$$h(g) = \inf_{C \in E^*} \sup_{v \in C} (v, g) < 0 \ \ \forall g \in \mathbb{S},$$

где E^* *– семейство выпуклых множеств из* $\mathbb{R}^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists \widetilde{\varepsilon} > 0 : \forall g \in \mathbb{S} \ \exists C_g \in E^*, \ (v, g) < -\widetilde{\varepsilon}, \ \forall v \in cl\ C_g. \tag{8}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00752).

Список литературы

1. *Demyanov, V. F.* Exhausters of a positively homogeneous function// Optimization. 1999. Vol. 45, no. 1-4, P. 13–29.
2. *Demyanov, V. F.* Exhausters and convexificators – new tools in nonsmooth analysis, Quasidifferentiability and related topics, Nonconvex Optim. Appl., Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 2000. Vol. 43. P. 85–137.
3. *Demyanov V. F., Rubinov A. M.* Constructive Nonsmooth Analysis, Approximation & Optimization, Frankfurt am Main, Peter Lang. 1995. 416 p.
4. *Demyanov V. F., Rubinov A. M.* Exhaustive families of approximations revisited, From convexity to nonconvexity, Nonconvex Optim. Appl., Vol. 55, Kluwer Acad. Publ. 2001. P. 43–50.
5. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
6. *Demyanov V. F., Roshchina V. A.* Constrained Optimality Conditions in Terms of Proper and Adjoint Exhausters// Appl. Comput. Math. 4. 2005. No. 2, P. 114–124.
7. *Demyanov V. F., Roschina V. A.* Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters// Optimization. 2006. Vol. 55, P. 525–540.
8. *Аббасов М. Э., Демьянов В. Ф.* Условия экстремума негладкой функции в терминах экзостеров и коэкзостеров. Тр. ИММ УрО РАН, Т.15, №4. 2009. С. 10-–19.
9. *Аббасов М. Э.* Условия экстремума в терминах несобственных экзостеров. Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика информатика процессы управления. 2011. Вып. 2. С. 3–8.
10. *Abbasov, M. E., Demyanov, V. F.* Proper and adjoint exhausters in Nonsmooth analysis: optimality conditions// Journal of Global Optimization. 2012. DOI: 10.1007/s10898-012-9873-8.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БАРБАШИНА

С.Т. Алиева[1], Ж.Б. Ахмедова[2]

[1] Бакинский Государственный Университет, З.Халилов 23, Баку, Азербайджан
mansimov@front.ru

[2] Институт Кибернетики НАН Азербайджана, Б.Вахабзаде 9, Баку, Азербайджан
akja@rambler.ru

Пусть управляемый процесс описывается системой интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина [1–3]

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \int\limits_a^b K(t,x,s)z(t,s)ds + f(t,x,u(t)),\ (t,x) \in D = [t_0,t_1] \times [a,b], \quad (1)$$