

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ GARCH(1,1) С ОСТАТКАМИ, ИМЕЮЩИМИ РЕГУЛЯРНО МЕНЯЮЩЕЕСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

For the estimation of parameters of model GARCH(1,1) with the errors having regularly varying distribution with index $\alpha > 0$, updating of the maximum likelihood function is constructed. The consistency and the asymptotic normality of the constructed estimations are proved.

Рассмотрим модель GARCH(1,1) вида

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in Z, \quad (1)$$

где

$$\sigma_t^2 = \omega_0(1 - \beta_0) + \alpha_0 y_{t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{t-1}^2, \quad (2)$$

$$\omega_0 > 0, \alpha_0 > 0, 0 \leq \beta_0 < 1, \quad (3)$$

$\{\varepsilon_t\}$ – независимые, одинаково распределенные регулярно меняющиеся случайные величины с индексом $\alpha > 0$ (см. [1]).

Пусть $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_0, \beta_0)$ – неизвестные параметры модели, $\Theta = \{\theta = (\omega, \alpha, \beta) : 0 < \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, 0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, 0 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 < 1, E \ln(\beta + \alpha \varepsilon_0^2) < 0\}$ – параметрическое пространство, θ_0 – внутренняя точка пространства Θ , тогда рассматриваемая параметрическая модель может быть представлена в виде $y_t = \sigma_t(\theta) \varepsilon_t$, $t \in Z$, причем, следуя работам [2, 3],

$$\sigma_t^2(\theta) = \omega + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k y_{t-k-1}^2, \quad t \in Z. \quad (4)$$

Лемма 1. При любых $i = \overline{1, n}$ имеем неравенство

$$\frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-i}^2} \leq \prod_{j=1}^i (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2).$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Для $i = 1$, используя (2), (3), получим

$$\frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-1}^2} = \frac{\omega_0(1-\beta_0) + \alpha_0 y_{t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{t-1}^2}{\sigma_{t-1}^2} = \frac{\omega_0(1-\beta_0)}{\sigma_{t-1}^2} + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_0 \leq 1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2.$$

Предположим, что лемма справедлива при $i = n-1$, тогда

$$\frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-n+1}^2} \leq \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2). \quad (5)$$

Докажем, что лемма справедлива для $i = n$. Используя (2), (3), получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-n}^2} &= \frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-n+1}^2} \cdot \frac{\sigma_{t-n+1}^2}{\sigma_{t-n}^2} = \frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-n+1}^2} \cdot \frac{\omega_0(1-\beta_0) + \alpha_0 y_{t-n}^2 + \beta_0 \sigma_{t-n}^2}{\sigma_{t-n}^2} = \frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-n+1}^2} \left[\frac{\omega_0(1-\beta_0)}{\sigma_{t-n}^2} + \alpha_0 \varepsilon_{t-n}^2 \frac{\sigma_{t-n}^2}{\sigma_{t-n}^2} + \beta_0 \frac{\sigma_{t-n}^2}{\sigma_{t-n}^2} \right] = \\ &= \frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-n+1}^2} \left[\frac{\omega_0(1-\beta_0)}{\sigma_{t-n}^2} + \alpha_0 \varepsilon_{t-n}^2 + \beta_0 \right] \leq \frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-n+1}^2} (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-n}^2). \end{aligned}$$

Из (5) имеем

$$\frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-n}^2} \leq \prod_{j=1}^n (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. При любом натуральном числе $M > 0$

$$\frac{\sigma_t^2(\theta)}{\sigma_t^2} \geq \frac{\alpha}{\prod_{j=1}^{M+1} (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2)} \sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2.$$

Доказательство. Из (4) вытекает, что

$$\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} = \frac{\sigma_t^2}{\omega + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k y_{t-k-1}^2} \leq \frac{\sigma_t^2}{\alpha \sum_{k=0}^M \beta^k y_{t-k-1}^2} \quad (6)$$

при любом натуральном числе $M > 0$.

Используя лемму 1 и (6), получим

$$\frac{\sigma_t^2(\theta)}{\sigma_t^2} \geq \frac{\alpha \sum_{k=0}^M \beta^k y_{t-k-1}^2}{\sigma_t^2} = \alpha \sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2 \frac{\sigma_{t-k-1}^2}{\sigma_t^2} \geq \alpha \sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2 \frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1} (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2)} \geq \frac{\alpha}{\prod_{j=1}^{M+1} (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2)} \sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. При любых λ , $0 < \lambda < \alpha$,

$$E \left\{ \sup_{\theta \in \Theta} \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right\}^\lambda < \infty. \quad (7)$$

Доказательство. Используя неравенство Гёльдера и лемму 2, при любых p' , $\lambda < p' < \alpha$, имеем

$$\begin{aligned} E \left\{ \sup_{\theta \in \Theta} \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right\}^\lambda &\leq \frac{1}{\alpha^\lambda} E \left[\left(\prod_{j=1}^{M+1} (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2) \right)^\lambda \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2} \right)^\lambda \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha^\lambda} \left\{ E \left(\prod_{j=1}^{M+1} (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2) \right)^{p'} \right\}^{\lambda/p'} \left\{ E \left(\sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2 \right)^{-\lambda p'/(p'-\lambda)} \right\}^{(p'-\lambda)/p'}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из независимости случайных величин $\{\varepsilon_t\}$ получим

$$\left\{ E \left(\prod_{j=1}^{M+1} (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2) \right)^{p'} \right\}^{\lambda/p'} = \left(\prod_{j=1}^{M+1} E (1 + \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2)^{p'} \right)^{\lambda/p'} < \infty. \quad (9)$$

Так как $\{\varepsilon_t\}$ – регулярно меняющиеся случайные величины с индексом α , то $\{\varepsilon_t^2\}$ имеют регулярно меняющееся распределение с индексом $\alpha/2$. Тогда $\sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2$ является регулярно меняющейся случайной величиной с индексом $\alpha/2$. Из леммы 3.1 [1] имеем

$$E \left(\sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2 \right)^{-\lambda p'/(p'-\lambda)} < \infty. \quad (10)$$

Используя (8) – (10), получим (11).

Теорема доказана.

Рассмотрим модифицированную функцию правдоподобия в следующем виде:

$$L_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t(\theta), \quad l_t(\theta) = - \left[\ln \sigma_t^2(\theta) + \frac{1}{p} \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^p \right], \quad (11)$$

p – некоторая константа, $0 < p < \alpha$.

Пусть $\hat{\theta}_n$ – M -оценка параметра θ_0 модели (1) – (3) с функцией правдоподобия (11), т. е.

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta).$$

Теорема 2. Предположим, что $0 < p < \alpha$, $E |\varepsilon_0^2|^p = 1$, тогда

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{n.u.} \theta_0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы проводится аналогично, как в работе [4].

Теорема 3. Предположим, что $E |\varepsilon_0^2|^p = 1$, тогда для $0 < p < \alpha/4$ имеем

$$n^{1/2} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, B^{-1} \Sigma B^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где

$$\Sigma = (E(\varepsilon_0^4)^p - 1)A, \quad A = E \left[\left(\frac{(\sigma_0^2(\theta_0))'}{\sigma_0^2} \right)^T \frac{(\sigma_0^2(\theta_0))'}{\sigma_0^2} \right], \quad B = E l_0''(\theta_0).$$

Доказательство теоремы проводится аналогично, как в работе [4].

1. Jessen A.H., Mikosch T. // Publications de L'Institut Mathématique. 2006. Vol. 80 (94). P. 171.

2. Berkes I., Horváth L. // Statist. Probab. Lett. 2003. Vol. 61. P. 133.

3. Berkes I., Horváth L. // Ann. of statist. 2004. Vol. 32. № 2. P. 633.

4. Труш Н.Н., Ле Хонг Шон // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 1. С. 13.

Поступила в редакцию 15.12.10.

Николай Николаевич Труш – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики.

Чэнь Хайлун – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель – Н.Н. Труш.