Краткие сообщения

УДК 515.12

Д.С. ФРОЛОВА

О СУПРЕМАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ

The subject of the study is different topologies on the set of continuous maps $C(X,Y)$ with metrizable Y, especially the topologies of uniform convergence $\tau_\mu^{(X,Y)}$ and the topology $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ determined as the supremum of all topologies of the type $\tau_\mu^{(X,Y)}$. The main result was obtained in assumption that space X is completely regular and space Y is metrizable, linear connected and locally moveable.

Theorem. The topology $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ has a countable tightness ($\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ – k-topology) if and only if Y is compact or X is pseudocompact. At that all topologies of the type $\tau_\mu^{(X,Y)}$ coincide.

В предлагаемой статье продолжено исследование пространства непрерывных отображений $C(X,Y)$ с топологиями равномерной сходимости $\tau_\mu^{(X,Y)}$ и топологией $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$, начатое в [1, 2]. Под пространством следует понимать топологическое T_1-пространство, под отображением – непрерывное отображение.

Одним из основных результатов работы [2] является следующая

Теорема 1 (теорема 3.6 из [2]). *При локально подвижном метризуемом пространстве Y эквивалентны условия: (a) топология* $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ *имеет счетную тесноту; (b)* $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ *– k-топология; (c)* $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ *совпадает с любой топологией вида* $\tau_\mu^{(X,Y)}$; *(d) множество* $[f(X)]_Y$ *компактно для любого* $f \in C(X, Y)$.

Этот результат удалось дополнить, рассмотрев частный случай, когда пространство X вполне регулярно, а пространство Y линейно связно (ситуация совершенно естественная с точки зрения функционального анализа).

Теорема 2. *Пусть пространство X вполне регулярно, Y метризуемо, линейно связно и локально подвижно. Тогда эквивалентны условия: (a) топология* $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ *имеет счетную тесноту; (b)* $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ *– k-топология; (c) все топологии вида* $\tau_\mu^{(X,Y)}$ *совпадают; (d) X псевдокомпактно или Y компактно.*

Доказательство теоремы 2 и составляет основную цель настоящей статьи.

Понятия и обозначения. Как и в [1], для произвольных пространства X, множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ обозначим: τ_X – топология пространства X; $[A]_X$, $\tau_X(A)$ – замыкание множества A в X и соответственно семейство всех окрестностей множества A в X ($\tau_X(x)$ при $A = \{x\}$); $C(X,Y)$ – множество всех отображений пространства X в пространство Y.

Семейство α некоторых множеств в пространстве X называют дискретным в X, если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность $U \in \tau_X(x)$, пересекающаяся не более чем с одним элементом α (множество A дискретно в X, если таковым является семейство $\{\{a\} \mid a \in A\}$).

Говорят, что топология τ_X имеет счетную тесноту (см. [3, с. 104]), если для любых $A \subset X$ и $x \in [A]_X \setminus A$ существует счетное $B \subset A$, для которого $[B]_X \ni x$. Пространство X называют k-пространством (см. [3, с. 236]) (τ_X при этом назовем k-топологией), если для любого не замкнутого в X множества A найдется компактное $B \subset X$ такое, что $A \cap B$ не замкнуто в B.

Если Y метризуемо, Ω_Y – множество всех допустимых метрик на Y, то на $C(X,Y)$ определены: для каждой метрики $\rho \in \Omega_Y$ соответствующая топология равномерной сходимости $\tau_\mu^{(X,Y)}$, заданная метрикой равномерной сходимости $\mu = \mu(\rho)$, $\mu(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$, а также топология $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ (см. [1]), предбазой которой служит семейство $\bigcup\{\tau_{\mu(\rho)}^{(X,Y)} \mid \rho \in \Omega_Y\}$ (т. е. топология $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ наименьшая по включению, содержащая все топологии вида $\tau_\mu^{(X,Y)}$).

Пространство X называется псевдокомпактным, если любая функция $f \in C(X)$ ограничена. Всякое счетно компактное пространство псевдокомпактно, а для нормального пространства верно и обратное (см. [3, с. 310]).

Пространство X назовем локально подвижным (см. [1, 2]), если для любой пары (x_0, U), где $x_0 \in X$, $U \in \tau_X(x_0)$, найдется отображение $f \in C(X, X)$ такое, что $f(x) = x$ при $x \notin U$, $f(U) \subset U$ и $f(x_0) \neq x_0$.

Доказательство теоремы 2.

Лемма 1. *Вполне регулярное пространство X является псевдокомпактным тогда и только тогда, когда любое дискретное в X семейство непустых открытых множеств конечно.*

Лемма 1 дополняет известную характеристику псевдокомпактных пространств (см. [3, с. 311]) и доказывается схожим образом.

Лемма 2. *Если пространство X вполне регулярно, а пространство Y нормально и линейно связно, то эквивалентны следующие условия: (a)* $[f(X)]_Y$ *счетно компактно для любого* $f \in C(X,Y)$; *(b) X псевдокомпактно или Y счетно компактно.*

Доказательство. Покажем (b) $\Rightarrow$ (a). При счетно компактном Y факт очевиден. Пусть X псевдокомпактно. Допустим от противного, что $[f(X)]_Y$ не счетно компактно для некоторого $f \in C(X,Y)$. Тогда найдется дискретное в Y множество $\{y_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset [f(X)]_Y$, $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$ (см. [3, с. 304]). Поскольку Y нормально, то существует дискретное в Y семейство $\{U_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, где $U_n \in \tau_Y(y_n)$, $n \in \mathbf{N}$ (см. [3, с. 119, 452]). Но тогда $\{f^{-1}(U_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ – бесконечное дискретное в X семейство непустых открытых в X множеств, что в силу леммы 1 противоречит псевдокомпактности X. Покажем (a) $\Rightarrow$ (b). Допустим от противного, что X не псевдокомпактно, а Y не счетно компактно. Тогда в Y найдется дискретное множество $\{y_n \mid n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$, $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$, а в силу леммы 1 в X существует такое бесконечное дискретное семейство $\{U_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, что $\varnothing \neq U_n \in \tau_X$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Фиксируем произвольную точку $x_n \in U_n$. Поскольку X вполне регулярно, то для каждой точки x_n и ее окрестности U_n, $n \in \mathbf{N}$, существует непрерывная функция $\varphi_n : X \to I$ (здесь и далее $I = [0,1]$) такая, что $\varphi_n(x_n) = 1$, $\varphi_n(x) = 0$ для $x \in X \setminus U_n$. Из линейной связности Y следует, что для точек y_0 и y_n, $n \in \mathbf{N}$, найдется такое отображение $\psi_n : I \to Y$, что $\psi_n(1) = y_n$, $\psi_n(0) = y_0$. Тогда $f_n = \psi_n \circ \varphi_n$ является непрерывным отображением из X в Y, и при этом $f_n(x_n) = y_n$ и $f_n(x) = y_0$ для $x \in X \setminus U_n$. Далее определим отображение $f : X \to Y$ следующим образом: $f(x) = f_n(x)$, когда $x \in U_n$, $n \in \mathbf{N}$, $f(x) = y_0$ при $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Поскольку семейство $\{U_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ дискретно в X, для любой точки $x \in X$ найдутся $V \in \tau_X(x)$ и $n \in \mathbf{N}$, при которых $f|_V = f_n$, откуда следует, что $f \in C(X,Y)$. Однако $[f(X)]_Y$ содержит дискретное множество $\{y_n \mid n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$, что противоречит его счетной компактности. Лемма доказана.

А теперь теорема 2 вытекает непосредственно из теоремы 1 и леммы 2 в случае метризуемого пространства Y.

1. Тимохович В.Л., Фролова Д.С. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 84.
2. Кукрак Г.О., Тимохович В.Л. // Там же. 2010. № 1. С. 144.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.

Поступила в редакцию 21.10.10.

Дарья Сергеевна Фролова – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики В.Л. Тимохович.