УДК 517.97

И.А. БОЙЦОВА (УКРАИНА)

ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

There is described and justified numerical asymptotical method of solution of discrete tasks of optimum control with fast and slow variables. Optimal control problem is associated with the averaged problem, which is simpler than the original and its solution requires fewer computations compared to a given task. We construct an asymptotically optimal control of the original problem found by the optimal control of the averaging problem.

Задача оптимального управления системой дискретных уравнений стандартного вида рассмотрена в [1], где приведен и обоснован численный метод построения асимптотически оптимального решения заданной задачи при условии существования оптимального решения соответствующей усредненной задачи.

Рассмотрим задачу оптимального управления системой дискретных уравнений с быстрыми и медленными переменными и терминальным критерием качества вида

$$\begin{aligned} &x_{i+1}=x_i+\varepsilon\cdot\left[X\left(i,x_i,y_i\right)+A\left(x_i\right)\cdot\varphi\left(i,u_i\right)\right], && x_0=x^0,\\ &y_{i+1}=Y\left(i,x_i,y_i\right), && y_0=y^0. \end{aligned} \tag{1}$$

$$J\left(u\right)=\Phi\left(x_N\right)\to\min_{u\subset U}, \tag{2}$$

где $x_i\in D_x\subset R^n$ – медленные переменные, $y_i\in D_y\subset R^m$ – быстрые переменные, $\varepsilon>0$ – малый параметр, $X\left(i,x_i,y_i\right)$, $Y\left(i,x_i,y_i\right)$, $\varphi\left(i,u_i\right)$ – заданные вектор-функции, $A\left(x_i\right)$ – заданная $n\times l$-матрица, $i\in I=\left\{0,1,2,...,N\right\}$, $N=E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$, $L=\mathrm{const}$, $E\left(s\right)$ – целая часть числа s, x^0, y^0 – заданные начальные условия системы, $u_i\in U\subset \mathrm{comp}\left(R^r\right)$ – вектор управления, $\mathrm{comp}\left(R^r\right)$ – пространство компактных подмножеств в пространстве R^r с метрикой Хаусдорфа

$$\delta\left(A,B\right)=\min\left\{d\geq 0: B\subset S_d\left(A\right), A\subset S_d\left(B\right)\right\},$$

где $S_d\left(A\right)$ – замкнутая d-окрестность компактного множества $A\subset R^r$.

Для системы дискретных уравнений (1) запишем соответствующую вырожденную систему с начальными условиями рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} &x_{i+1}=x_i, && x_0=x^0,\\ &y_{i+1}=Y\left(i,x_i,y_i\right), && y_0=y^0. \end{aligned} \tag{3}$$

Решение вырожденной системы представим в виде

$$\begin{aligned} &x=\mathrm{const},\\ &y_i=y\left(\,i,x,y^0,0\,\right), \end{aligned} \tag{4}$$

при этом x будем считать варьируемым параметром.

Задаче оптимального управления (1), (2) поставим в соответствие возмущенную задачу для медленных переменных с теми же управляющими функциями:

$$\tilde{x}_{i+1}=\tilde{x}_i+\varepsilon\cdot\left[X\left(\,i,\tilde{x}_i,y\left(\,i,\tilde{x}_i,y^0,0\,\right)\right)+A\left(\tilde{x}_i\right)\cdot\varphi\left(i,u_i\right)\right],\qquad \tilde{x}_0=x^0, \tag{5}$$

$$\tilde{J}\left(u\right)=\Phi\left(\tilde{x}_N\right)\to\min_{u\subset U}. \tag{6}$$

Пусть равномерно относительно $q\geq 0$, $x\in D_x$, $y^0\in D_y$ существует предел

$$\overline{X}\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=q}^{q+n-1}X\left(\,j,x,y\left(\,j,x,y^0,0\,\right)\right). \tag{7}$$

Кроме того, построим множество допустимых управлений вида

$$V=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=q}^{q+n-1}\varphi\left(j,U\right). \tag{8}$$

Сходимость в (7), (8) понимается в смысле метрики Хаусдорфа. При этом из существования предела (8) следует, что найдется монотонно убывающая функция $f(n)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0,$ и будет справедливо неравенство

$$\delta\left(V, \frac{1}{n}\sum_{j=q}^{q+n-1} \varphi\left(j, U\right)\right) \le f(n). \tag{9}$$

Выберем целочисленное значение $h(\varepsilon)$, обладающее свойствами

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon) = +\infty,\ \ \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\cdot h(\varepsilon) = 0. \tag{10}$$

Разобьем множество $I = \{\,0,1,2,...,N\,\}$ на отрезки длиной $h(\varepsilon)$ точками деления $k\cdot h(\varepsilon)$, $k\in I_k = \{0,1,2,...,N_k\}$, при этом выбор значений k будет определяться выполнением условия $k\cdot h \le \dfrac{L}{\varepsilon}$, поэтому $N_k = E\left(\dfrac{L}{\varepsilon h}\right)$.

Возмущенной задаче оптимального управления (5), (6) поставим в соответствие усредненную задачу на множестве значений $k\in I_k = \{0,1,2,...,N_k\}$:

$$w_{k+1} = w_k + \varepsilon h\cdot\left[\bar{X}(w_k) + A(w_k)\cdot v_k\right], \qquad w_0 = x^0, \tag{11}$$

$$z_i = w_k + \frac{(i-kh)(w_{k+1}-w_k)}{h},\ i\in\left[kh, (k+1)\cdot h - 1\right), \tag{12}$$

$$\bar{J}(v) = \Phi(z_N) \to \min_{v\subset V}. \tag{13}$$

Установим соответствие между управляющими функциями $u_i\in U$, $i\in I$, системы (1) и управляющими функциями $v_k\in V$, $k\in I_k$, усредненной системы (11).

Рассмотрим произвольный промежуток $\left[kh, (k+1)\cdot h\right]\subset I$, $k\in I_k$. Из неравенства (9) следует, что для любого допустимого управления $u_i\in U$ заданной системы (1) на промежутке $i\in\left[kh,(k+1)\cdot h-1\right)$ существует ступенчатое среднее управление $\bar{v}_k\in V$ усредненной системы (11) и справедливо соотношение

$$\left\| \bar{v}_k - \frac{1}{h}\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\varphi\left(j, u_j\right)\right\| = \min_{v_k\subset V}\left\| v_k - \frac{1}{h}\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\varphi\left(j,u_j\right)\right\| \le f(h). \tag{14}$$

Аналогично для любого допустимого управления $v_k\in V$ усредненной системы (11) на промежутке $i\in\left[kh,(k+1)\cdot h-1\right)$ существует управление $\bar{u}_i\in U$ заданной системы (1) и справедливо соотношение

$$\left\| v_k - \frac{1}{h}\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\varphi\left(j, \bar{u}_j\right)\right\| = \min_{u_j\subset U}\left\| v_k - \frac{1}{h}\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\varphi\left(j,u_j\right)\right\| \le f(h). \tag{15}$$

Докажем, что для оптимального управления $u_i^*\in U$ заданной задачи (1), (2) построенное управление $\bar{v}_k\in V$ можно взять в качестве асимптотически оптимального управления для задачи (11) – (13), а для оптимального управления $v_k^*\in V$ усредненной задачи (11) – (13) построенное управление $\bar{u}_i\in U$ – в качестве асимптотически оптимального управления для задачи (1), (2).

Теорема. Пусть в области $Q = \{\,i\in I;\ x_i\in D_x;\ y_i\in D_y;\ u_i\in U\,\}$ выполняются следующие условия:

I) функции $X(i,x_i,y_i)$, $A(x_i)$, $\varphi(i,u_i)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянными $H_1>0, H_2>0, H_3>0$ соответственно:

$$\left\|X\left(i,x^1,y^1\right) - X\left(i,x^2,y^2\right)\right\| \le H_1\cdot\left(\left\|x^1-x^2\right\| + \left\|y^1-y^2\right\|\right),$$

$$\left\|A\left(x^1\right) - A\left(x^2\right)\right\| \le H_2\cdot\left\|x^1-x^2\right\|,\ \ \left\|\varphi\left(i,u^1\right)-\varphi\left(i,u^2\right)\right\| \le H_3\cdot\left\|u^1-u^2\right\|;$$

II) функция $Y(i, x_i, y_i)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $H_4 > 0$:

$$\left\| Y(i, x^1, y^1) - Y(i, x^2, y^2) \right\| \le H_4 \cdot \left(\left\| x^1 - x^2 \right\| + \left\| y^1 - y^2 \right\| \right);$$

III) функции $X(i, x_i, y_i)$, $A(x_i)$, $\varphi(i, u_i)$ равномерно ограничены постоянной M:

$$\left\| X(i, x_i, y_i) \right\| \le M, \ \left\| A(x_i) \right\| \le M, \ \left\| \varphi(i, u_i) \right\| \le M;$$

IV) функция $\Phi(x_i)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $H_5 > 0$:

$$\left\| \Phi(x^1) - \Phi(x^2) \right\| \le H_5 \cdot \left\| x^1 - x^2 \right\|;$$

V) решение (4) вырожденной системы (3) удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной $H_6 > 0$:

$$\left\| y(i, x^1, y^0, 0) - y(i, x^2, y^0, 0) \right\| \le H_6 \cdot \left\| x^1 - x^2 \right\|;$$

VI) равномерно относительно $q \ge 0$, $x \in D_x$, $y^0 \in D_y$ существуют пределы (7) и (8);

VII) для любого допустимого управления $v_k \in V$ соответствующее решение $z = z_i$, $i \in I$, усредненной системы (11) – (13) с начальным условием $z_0 = x^0 \in D_x$ определено и лежит со своей ρ-окрестностью в области D_x.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ справедливо следующее:

1) если для заданной задачи (1), (2) существует оптимальное решение $\left\{ u_i^* \in U, \ x_i^* \in D_x, \ y_i^* \in D_y, \ J(u^*), \ i \in I \right\}$, то существует допустимое управление $\overline{v}_k \in V$ и соответствующая траектория $\overline{z}_i \in D_x$ усредненной системы (11), (12), что

$$\left\| x_i^* - \overline{z}_i \right\| \le \eta, \tag{16}$$

$$\left| J(u^*) - \overline{J}(\overline{v}) \right| \le \eta; \tag{17}$$

2) для оптимального решения $\left\{ v_k^* \in V, \ z_i^* \in D_x, \ \overline{J}(v^*), \ k \in I_k, \ i \in I \right\}$ усредненной задачи (11) – (13) существует такое допустимое управление $\overline{u}_i \in U$ и соответствующая траектория $\overline{x}_i \in D_x$ заданной системы (1), что

$$\left\| z_i^* - \overline{x}_i \right\| \le \eta, \tag{18}$$

$$\left| \overline{J}(v^*) - J(\overline{u}) \right| \le \eta; \tag{19}$$

3) оптимальное решение усредненной задачи (11) – (13) является асимптотически оптимальным решением заданной задачи (1), (2), т. е.

$$\left| J(u^*) - \overline{J}(v^*) \right| \le \eta, \ J(\overline{u}) - J(u^*) \le \eta. \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(i, x_i, y_i, u_i) = X(i, x_i, y_i) + A(x_i) \cdot \varphi(i, u_i),$$

которая на любых допустимых управлениях $u_i \in U$ при выполнении условий теоремы удовлетворяет условию Липшица

$$\left\| F(i, x^1, y^1, u) - F(i, x^2, y^2, u) \right\| \le$$

$$\le \left\| X(i, x^1, y^1) - X(i, x^2, y^2) \right\| + \left\| \varphi(i, u) \right\| \cdot \left\| A(x^1) - A(x^2) \right\| \le$$

$$\le H_1 \cdot \left(\left\| x^1 - x^2 \right\| + \left\| y^1 - y^2 \right\| \right) + M \cdot H_2 \cdot \left\| x^1 - x^2 \right\| \le (H_1 + M \cdot H_2) \cdot \left(\left\| x^1 - x^2 \right\| + \left\| y^1 - y^2 \right\| \right)$$

и является ограниченной

$$\left\| F(i, x_i, y_i, u_i) \right\| \le \left\| X(i, x_i, y_i) \right\| + \left\| A(x_i) \right\| \cdot \left\| \varphi(i, u_i) \right\| \le M + M \cdot M = M \cdot (1 + M).$$

Значит, на одних и тех же допустимых функциях управления $u_i \in U$ для заданной задачи (1) и соответствующей возмущенной задачи (5) выполнены все условия теоремы 2 [2] о близости соответствующих решений медленных подсистем.

Иначе говоря, для любых $\eta_1 > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_1(\eta_1, L) > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ на одних и тех же допустимых управлениях $u_i \in U$

$$\| x_i - \tilde{x}_i \| \le \eta_1. \tag{21}$$

Предположим, что для заданной задачи оптимального управления (1), (2) существует оптимальное управление u_i^*, тогда существует оптимальная траектория x_i^*, y_i^* и оптимальное значение критерия качества $J(u^*)$. Неравенство (21) будет справедливо и для оптимального управления $u_i^* \in U$ исходной задачи (1), (2)

$$\| x_i^* - \tilde{x}_i \| \le \eta_1. \tag{22}$$

Неравенство (21) выполняется для любого $i \in I$, значит, и для $i = N$, поэтому с учетом условия IV) теоремы для любого допустимого управления $u_i \in U$ получаем

$$| J(u) - \tilde{J}(u) | = | \Phi(x_N) - \Phi(\tilde{x}_N) | \le H_5 \cdot \| x_N - \tilde{x}_N \| \le H_5 \cdot \eta_1. \tag{23}$$

Неравенство (23) справедливо и для оптимального управления $u_i^* \in U$

$$| J(u^*) - \tilde{J}(u^*) | \le H_5 \cdot \eta_1. \tag{24}$$

Далее рассмотрим усредненную задачу (11) – (13), в которой по оптимальному управлению $u_i^* \in U$ задачи (1), (2) построим ступенчатое среднее управление $\bar{v}_k \in V$ на каждом промежутке $i \in [kh, (k+1) \cdot h - 1)$, $k \in I_k$, исходя из соотношения (14).

Система дискретных уравнений (11), (12) с управлением $\bar{v}_k \in V$ является частично усредненной по схеме ступенчатого усреднения к возмущенной системе дискретных уравнений (5) с управлением $u_i^* \in U$. Условия теоремы обеспечивают выполнение условий теоремы 1 [1] о близости соответствующих решений.

Следовательно, для любых $\eta_2 > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_2(\eta_2, L) > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ справедливо неравенство

$$\| \tilde{x}_i - \bar{z}_i \| \le \eta_2. \tag{25}$$

Неравенство (25) выполняется для любого $i \in I$, значит, и для $i = N$, поэтому с учетом условия IV) теоремы получаем

$$| \tilde{J}(u^*) - \bar{J}(\bar{v}) | = | \Phi(\tilde{x}_N) - \Phi(\bar{z}_N) | \le H_5 \cdot \| \tilde{x}_N - \bar{z}_N \| \le H_5 \cdot \eta_2. \tag{26}$$

Итак, если существует $\{ u_i^* \in U,\ x_i^* \in D_x,\ y_i^* \in D_y,\ J(u^*),\ i \in I \}$ – оптимальное решение заданной задачи (1), (2), то существует такое допустимое управление $\bar{v}_k \in V$, $k \in I_k$, определяемое соотношением (14), и соответствующая ему траектория $\bar{z}_i \in D_x$ усредненной системы (11), (12), что для любого $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ с учетом полученных оценок (22), (25) и (24), (26) выполняются неравенства

$$\| x_i^* - \bar{z}_i \| \le \| x_i^* - \tilde{x}_i \| + \| \tilde{x}_i - \bar{z}_i \| \le \eta_1 + \eta_2,$$

$$| J(u^*) - \bar{J}(\bar{v}) | \le | J(u^*) - \tilde{J}(u^*) | + | \tilde{J}(u^*) - \bar{J}(\bar{v}) | \le H_5\eta_1 + H_5\eta_2.$$

Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $\max\{ \eta_1 + \eta_2,\ H_5(\eta_1 + \eta_2) \} \le \eta$, и получим выполнение неравенств (16), (17) теоремы. Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Множество допустимых управлений V, построенное согласно (8), при выполнении условий теоремы является выпуклым и компактным. Следовательно, существует оптимальное управление $v_k^* \in V$, $k \in I_k$, усредненной задачи (11) – (13), соответствующая оптимальная траектория z_i^*, $i \in I$, и оптимальное значение критерия качества $\bar{J}\left(v^*\right)$. Управление $v_k^* \in V$ является ступенчатым средним управлением относительно управления $\bar{u}_i$, построенного по формуле (15). Значит, система (11), (12) с управлением v_k^* является частично усредненной по схеме ступенчатого усреднения по отношению к возмущенной системе (5) с управлением $\bar{u}_i$. Условия теоремы и построение (15) обеспечивают выполнение условий теоремы 1 [1] о близости соответствующих решений.

Следовательно, для любых $\eta_1 > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_1\left(\eta_1, L\right) > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ справедливо неравенство

$$\| z_i^* - \tilde{x}_i \| \le \eta_1, \tag{27}$$

которое выполняется для любого $i \in I$, значит, и для $i = N$, поэтому с учетом условия IV) теоремы получаем

$$\left| \bar{J}\left(v^*\right) - \tilde{J}\left(\bar{u}\right) \right| = \left| \Phi\left(z_N^*\right) - \Phi\left(\tilde{x}_N\right) \right| \le H_5 \cdot \| z_N^* - \tilde{x}_N \| \le H_5 \cdot \eta_1. \tag{28}$$

Однако для возмущенной системы (5) и исходной системы (1) на одних и тех же допустимых управлениях $\bar{u}_i \in U$ выполнены все условия теоремы 2 [2] о близости соответствующих решений.

Следовательно, для любых $\eta_2 > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_2\left(\eta_2, L\right) > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ на одних и тех же управлениях справедливо

$$\| \bar{x}_i - \tilde{x}_i \| \le \eta_2, \tag{29}$$

$$\left| J\left(\bar{u}\right) - \tilde{J}\left(\bar{u}\right) \right| = \left| \Phi\left(\bar{x}_N\right) - \Phi\left(\tilde{x}_N\right) \right| \le H_5 \cdot \| \bar{x}_N - \tilde{x}_N \| \le H_5 \cdot \eta_2. \tag{30}$$

Таким образом, если $\left\{ v_k^* \in V,\ z_i^* \in D_x,\ \bar{J}\left(v^*\right),\ k \in I_1,\ i \in I \right\}$ – оптимальное решение усредненной задачи (11) – (13), то существует такое допустимое управление $\bar{u}_i \in U$, определяемое равенством (15), и соответствующая ему траектория $\bar{x}_i \in D_x$ заданной системы (1), что для любого $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0\left(\eta, L\right) > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ с учетом полученных оценок (27), (29) и (28), (30) выполняются соотношения

$$\| z_i^* - \bar{x}_i \| \le \| z_i^* - \tilde{x}_i \| + \| \tilde{x}_i - \bar{x}_i \| \le \eta_1 + \eta_2,$$

$$\left| \bar{J}\left(v^*\right) - J\left(\bar{u}\right) \right| \le \left| \bar{J}\left(v^*\right) - \tilde{J}\left(\bar{u}\right) \right| + \left| \tilde{J}\left(\bar{u}\right) - J\left(\bar{u}\right) \right| \le H_5\eta_1 + H_5\eta_2.$$

Выбирая $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $\max\left\{ \eta_1 + \eta_2,\ H_5\left(\eta_1 + \eta_2\right) \right\} \le \eta$, получим неравенства (18), (19) теоремы.

Перейдем к третьей части теоремы. Пусть $J\left(u^*\right)$ – оптимальное значение критерия качества заданной задачи (1), (2), а значит, на оптимальном управлении критерий качества принимает наименьшее значение

$$J\left(\bar{u}\right) \ge J\left(u^*\right). \tag{31}$$

Если $\bar{J}\left(v^*\right)$ – оптимальное значение критерия качества задачи (11) – (13), то

$$\bar{J}\left(\bar{v}\right) \ge \bar{J}\left(v^*\right). \tag{32}$$

Для оптимальных значений критериев качества выполняется одно из неравенств

$$J\left(u^*\right) \ge \bar{J}\left(v^*\right) \text{ или } J\left(u^*\right) < \bar{J}\left(v^*\right).$$

В первом случае из (31) и (19) следует

$$J\left(\bar{u}\right) \ge J\left(u^*\right) \ge \bar{J}\left(v^*\right) \ge J\left(\bar{u}\right) - \eta \text{ или } \left| J\left(u^*\right) - \bar{J}\left(v^*\right) \right| \le \eta.$$

Во втором случае из (32) и (17) следует

$$\bar{J}\left(\bar{v}\right) \ge \bar{J}\left(v^*\right) > J\left(u^*\right) \ge \bar{J}\left(\bar{v}\right) - \eta \text{ или } \left| \bar{J}\left(v^*\right) - J\left(u^*\right) \right| \le \eta.$$

Следовательно, в обоих случаях справедливо первое неравенство из (20), из которого с учетом (19) следует второе неравенство из (20).

Теорема доказана.

Пусть в системе (1) функции $f(i, x_i, y_i)$, $\varphi(i, u_i)$ являются периодическими по i с периодом p, т. е. для любого $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ выполняются равенства $f(i+p, x_i, y_i) = f(i, x_i, y_i)$, $\varphi(i+p, u_i) = \varphi(i, u_i)$. Тогда вместо предела (7) потребуем, чтобы равномерно относительно $q \geq 0$, $x \in D_x$, $y^0 \in D_y$ существовала функция

$$\bar{X}(x) = \frac{1}{p} \sum_{j=q}^{q+p-1} X\left(j, x, y\left(j, x, y^0, 0 \right)\right).$$

Вместо множества (8) построим множество допустимых управлений вида

$$V = \frac{1}{p} \sum_{j=q}^{q+p-1} \varphi(j, U).$$

Выберем значение шага $h(\varepsilon) \equiv p = \text{const}$ и установим соответствие между управляющими функциями $u_i \in U$, $i \in I$, заданной системы (1) и управляющими функциями $v_k \in V$, $k \in I_k$, усредненной системы (11) при помощи соотношения

$$\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \varphi(j, u_j) = p v_k.$$

Следствие. Пусть в области $Q = \{ i \in I;\ x_i \in D_x;\ y_i \in D_y;\ u_i \in U \}$ выполняются все условия теоремы и функции $f(i, x_i, y_i)$, $\varphi(i, u_i)$ являются периодическими. Тогда для любого $L > 0$ существуют такие $C > 0$ и $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ модули разностей в (16) – (20) оцениваются величиной $C\varepsilon$.

Доказанная теорема является обоснованием численно-асимптотического метода решения задачи оптимального управления (1), (2), для которой с помощью метода усреднения строится задача (11) – (13), численными методами решаем усредненную задачу, которая проще заданной, вычисления можно проводить с большим шагом $h(\varepsilon)$. Полученное решение будет асимптотически оптимальным для задачи (1), (2).

1. Плотников В.А., Плотникова Л.И., Яровой А.Т. // Нелинейные колебания. 2004. Т. 7. № 2. С. 241.
2. Бойцова И.А. // Вісник Одеського національного університету. 2008. Т. 13. Математика і механіка. Вип. 18. С. 7.

Поступила в редакцию15.10.10.

Ирина Аркадьевна Бойцова – старший преподаватель кафедры информационных технологий Одесского государственного экологического университета.