ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ДОХОДОВ В НМ-СЕТИ С ПРИОРИТЕТНЫМИ ЗАЯВКАМИ

О. М. Китурко, М. А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь
E-mail: sytaya_om@mail.ru

В статье описано решение задачи максимизации доходов отдельных систем марковской НМ-сети и сети в целом по числу линий обслуживания, в которой обрабатываются заявки с абсолютным приоритетом и бесприоритетные заявки. Для этого использован разработанный рекуррентный по моментам времени метод анализа средних значений для такой сети. Рассчитан пример.

Ключевые слова: НМ-сеть, приоритетные заявки, задачи оптимизации.

Сети массового обслуживания (МО) с приоритетными заявками являются адекватными стохастическими моделями различных информационно-телекоммуникационных систем и сетей (ИТСС) [1], а также других объектов, например логистических транспортных систем (ЛТС). Одно из новых направлений развития теории сетей МО – решение задач прогнозирования ожидаемых доходов их систем обслуживания (СМО), связанных с перемещением заявок между СМО и учетом доходов от переходов сети, которые могут быть как детерминированными, так и случайными [2]. В данной статье мы опишем, как могут решаться задачи максимизации доходов отдельных СМО и сети в целом по числу линий обслуживания для марковской НМ-сети, в которой обслуживаются заявки с абсолютным приоритетом (заявки первого типа) и бесприоритетные заявки (заявки второго типа).

Опишем вначале рекуррентный метод нахождения в переходном режиме средних характеристик замкнутой сети с приоритетными заявками в случае, когда времена обслуживания заявок в линиях многолинейных СМО распределены по произвольным законам.

Рекуррентный по моментам времени метод анализа средних значений для сети с приоритетными заявками

Рассмотрим сеть МО с приоритетными заявками и произвольным обслуживанием заявок в линиях СМО. Заявки первого типа при обслуживании имеют абсолютный приоритет по отношению к бесприоритетным заявкам (второго типа). Обозначим через $\overline{\tau}_i(t)$ и $\overline{N}_{is}(t)$ соответственно среднее время пребывания заявок и среднее число заявок типа s в i-й СМО сети, вычисленное на интервале $[0,t]$, $i=\overline{1,n}$, $s=1$, 2. Введем величины:

$$\varepsilon_{i1}(\overline{N}_{i1}(t))=\min\{\overline{N}_{i1}(t),m_i\},\ i=\overline{1,n},$$

$$\varepsilon_{i2}(\overline{N}_{i1}(t),\overline{N}_{i2}(t))=\begin{cases}\overline{N}_{i2}(t),\ \overline{N}_{i1}(t)+\overline{N}_{i2}(t)<m_i,\\ m_i-\overline{N}_{i1}(t),\ \overline{N}_{i1}(t)<m_i,\ \overline{N}_{i1}(t)+\overline{N}_{i2}(t)\ge m_i,\ i=\overline{1,n},\\ 0,\ \overline{N}_{i1}(t)\ge m_i.\end{cases}$$

Величины ε_{i1}, ε_{i2} приближенно характеризуют среднее число занятых линий в системе S_i на интервале времени $[0,t]$ соответственно приоритетными и бесприоритетными заявками.

Закон сохранения потока заявок и формула Литтла позволяют записать следующие приближенные соотношения:

$$\mu_{j1}\varepsilon_{j1}(\bar{N}_{j1}(t)) + \mu_{j2}\varepsilon_{j2}(\bar{N}_{j1}(t),\bar{N}_{j2}(t)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\mu_{j1}\varepsilon_{j1}(\bar{N}_{j1}(t)) + \mu_{j2}\varepsilon_{j2}(\bar{N}_{j1}(t),\bar{N}_{j2}(t))\right] p_{ij}, \quad j=\overline{1,n}, \qquad (1)$$

$$\bar{N}_{i1}(t)+\bar{N}_{i2}(t) = \sum_{c=1}^{n}\left[\mu_{c1}\varepsilon_{c1}(\bar{N}_{c1}(t)) + \mu_{c2}\varepsilon_{c2}(\bar{N}_{c1}(t),\bar{N}_{c2}(t))\right] p_{ci}\bar{\tau}_i(t) =$$

$$= \left[\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(\bar{N}_{i1}(t)) + \mu_{i2}\varepsilon_{i2}(\bar{N}_{i1}(t),\bar{N}_{i2}(t))\right]\bar{\tau}_i(t), \; i=\overline{1,n}.$$

Если обозначить

$$e_{ij} = \frac{\mu_{j1}\varepsilon_{j1}(\bar{N}_{j1}(t)) + \mu_{j2}\varepsilon_{j2}(\bar{N}_{j1}(t),\bar{N}_{j2}(t))}{\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(\bar{N}_{i1}(t)) + \mu_{i2}\varepsilon_{i2}(\bar{N}_{i1}(t),\bar{N}_{i2}(t))},$$

то из (1) следует, что e_{ij} удовлетворяют системе уравнений, приведенной в [3], и поэтому

$$\bar{N}_{j1}(t)+\bar{N}_{j2}(t) = \left[\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(\bar{N}_{i1}(t)) + \mu_{i2}\varepsilon_{i2}(\bar{N}_{i1}(t),\bar{N}_{i2}(t))\right] e_{ji}\bar{\tau}_j(t),$$

$$K = K_1 + K_2 = \sum_{j=1}^{n}\left[\bar{N}_{j1}(t)+\bar{N}_{j2}(t)\right] =$$

$$= \left[\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(\bar{N}_{i1}(t)) + \mu_{i2}\varepsilon_{i2}(\bar{N}_{i1}(t),\bar{N}_{i2}(t))\right]\sum_{j=1}^{n} e_{ji}\bar{\tau}_j(t),$$

таким образом,

$$\bar{N}_{i1}(t)+\bar{N}_{i2}(t) = \frac{K_1\bar{\tau}_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} e_{ji}\bar{\tau}_j(t)} + \frac{K_2\bar{\tau}_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} e_{ji}\bar{\tau}_j(t)}.$$

Следовательно, для вычисления средних характеристик можно использовать рекуррентные по t соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{N}_{is}(0) = K_s, \quad s=1,\,2, \qquad (2)$$

$$\bar{\tau}_i(t) = \frac{\bar{N}_{i1}(t)+\bar{N}_{i2}(t)}{\mu_{i1}\varepsilon_{i1}(\bar{N}_{i1}(t)) + \mu_{i2}\varepsilon_{i2}(\bar{N}_{i1}(t),\bar{N}_{i2}(t))}, \; i=\overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$\bar{N}_{i1}(t+1) = \frac{K_1\bar{\tau}_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} e_{ji}\bar{\tau}_j(t)}, \; \bar{N}_{i2}(t+1) = \frac{K_2\bar{\tau}_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} e_{ji}\bar{\tau}_j(t)}, \; i=\overline{1,n}, \qquad (4)$$

$$\bar{N}_i(t+1) = \bar{N}_{i1}(t+1) + \bar{N}_{i2}(t+1), \; i=\overline{1,n}. \qquad (5)$$

В [3] описано, как можно находить с помощью рекуррентных по моментам времени методов средние характеристики сетей МО в стационарном режиме и в любой момент времени переходного режима.

Имеет место следующее утверждение, связанное со сходимостью данного метода.

Теорема. Если $\varepsilon_{i1}(\bar{N}_{i1}(t))\xrightarrow[t\to\infty]{}\rho_{i1}$, $\varepsilon_{i2}(\bar{N}_{i1}(t),\bar{N}_{i2}(t))\xrightarrow[t\to\infty]{}\rho_{i2}$, где ρ_{i1}, ρ_{i2} – среднее число занятых линий обслуживания соответственно приоритетными и неприоритетными заявками в системе S_i в стационарном режиме, то последовательности $\{\bar{N}_{is}(t)\}$, $\{\bar{\tau}_i(t)\}$, $s=1,\,2$, $t=1,\,2,\,\ldots$, сходятся.

Доказательство теоремы основано на использовании соотношений (3), (5) и соотношения для e_{ji}, с помощью которых показывается, что $\lim\limits_{t\to\infty}\left|\bar{N}_{is}(t+1)-\bar{N}_{is}(t)\right|=0$, $s=1,\,2$, т. е. последовательности $\{\bar{N}_{is}(t)\}$, $t=1,\,2,\,\ldots$, $s=1,\,2$ сходятся. Отсюда, учитывая (2) и (5), вытекает и сходимость последовательности $\{\bar{\tau}_i(t)\}$, , $t=1,\ 2,\,\ldots$.

Задача оптимизации и ее решение

Для НМ-сети с приоритетными заявками можно сформулировать две задачи оптимизации, связанные с максимизацией доходов отдельной СМО и сети в целом:

$$\begin{cases} W_i(T,m)=W_i(T,m_1,\,\ldots,m_n)=\dfrac{1}{T-t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{T}\left(v_i(t)-\sum_{s=1}^{2}d_{is}N_{is}(t)-E_i m_i\right)dt\to\max_{m_i,\ i=\overline{1,n}}, \\ m_i\le a_i,\ i=\overline{1,n}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} W(T,m)=W(T,m_1,\,\ldots,m_n)=\dfrac{1}{T-t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{n}\left(v_i(t)-\sum_{s=1}^{2}d_{is}N_{is}(t)-E_i m_i\right)dt\to\max_{m_i,i=\overline{1,n}}, \\ m_i\le a_i,\ i=\overline{1,n}, \end{cases} \quad (7)$$

где d_{is} – затраты на содержание одной заявки типа s в i-той СМО (в очереди и на обслуживании), E_i – затраты на содержание одной линии обслуживания в i-той СМО, $i=\overline{1,n}$.

Величины $\bar{N}_{is}(t)$ можно найти, применив рекуррентный по моментам времени метод (1) – (4), а ожидаемые доходы $v_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, – как в работе [4].

Пример

Рассмотрим сеть, изображенную на рисунке. Пусть $\mu_{11}=\mu_{81}=2$, $\mu_{21}=\mu_{51}=3$, $\mu_{31}=\mu_{91}=1$, $\mu_{41}=\mu_{61}=4$, $\mu_{11}=1$, $\mu_{21}=2$, $\mu_{31}=3$, $\mu_{41}=4$, $\mu_{51}=5$, $\mu_{61}=6$, $\mu_{71}=7$, $\mu_{81}=8$, $\mu_{91}=9$, $\mu_{10,1}=10$, $\mu_{11,1}=3$, $\mu_{12,1}=4$, $\mu_{13,1}=5$, $\mu_{14,1}=4$, $\mu_{15,1}=5$, $\mu_{16,1}=6$, $\mu_{17,1}=7$, $\mu_{12}=2$, $\mu_{22}=4$, $\mu_{32}=6$, $\mu_{42}=5$, $\mu_{52}=4$, $\mu_{62}=2$, $\mu_{72}=4$, $\mu_{82}=6$, $\mu_{92}=3$, $\mu_{10,2}=5$, $\mu_{11,2}=1$, $\mu_{12,2}=3$, $\mu_{13,2}=9$, $\mu_{14,2}=8$, $\mu_{15,2}=10$, $\mu_{16,2}=12$, $\mu_{17,2}=14$. Кроме того, пусть $m_i=1$, $N_i(0)=4$, $i=\overline{1,17}$. Вероятности переходов заявок между СМО сети равны $p_{1i}=\dfrac{1}{9}$, $i=\overline{2,10}$, $p_{i1}=1$, $i=\overline{2,9}$, $p_{10,i}=0,25$, $i=1,\ 11,\ 12,\ 13$, $p_{11,i}=0,25$, $i=10$, $14,15,16$, $p_{12,i}=0,5$, $i=10,\ 17$, $p_{13,i}=0,5$, $i=10,\ 17$, $p_{i,11}=1$, $i=\overline{14,16}$, $p_{17,i}=0,5$, $i=12,\ 13$, остальные $p_{ij} = 0$, $i, j = \overline{1,17}$. Пусть также $v_i(0) = 0$, $i = \overline{1,17}$, $t_0 = 0, T = 10$. Остальные параметры, необходимые для нахождения $v_i(t)$, указаны в примере статьи [4].

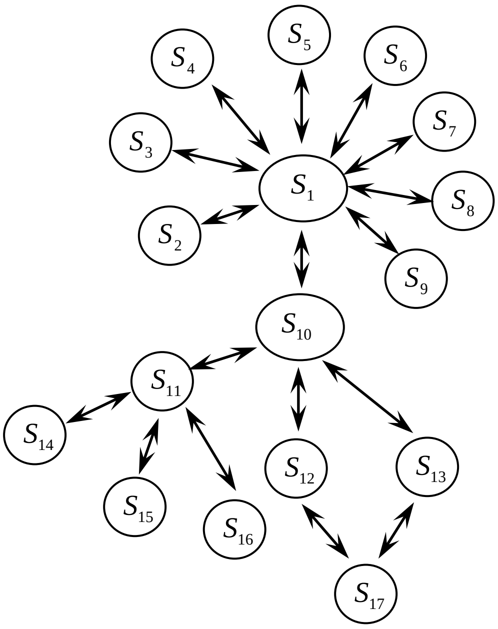

Схема сети

Оптимизационная задача (7) решалась методом полного перебора (были найдены $N_i(t)$, $i = \overline{1,17}$, с помощью рекуррентного метода, рассчитаны интегралы, осуществлялся оптимальный подбор m_i, $i = \overline{1,17}$). Для ее решения разработана компьютерная программа в пакете Delphi. Решением задачи (7) при вышеуказанных параметрах является $m_i^* = 1$, $i = 8$, 9, 14, 15, 16, $m_1^* = 5$, $m_i^* = 3$, $i = 2$, 3 4, 7, 10, 11, $m_i^* = 2$, $i = 5$, 6, 12, 13, 17, значение оптимизационного критерия в данном случае равно $W^*(10, m) = 37,278$.

Библиографические ссылки

1. *Вишневский В. М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М. : Техносфера, 2003.
2. *Матальщкий М. А.* Исследование сетей с многолинейными системами обслуживания и разнотипными заявками // Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С. 79–92.
3. *Матальщкий М. А., Тихоненко О. М., Колузаева Е. В.* Системы и сети массового обслуживания: анализ и применение. Гродно : ГрГУ, 2011.
4. *Kiturko O., Matalytski M.* Investigation of HM-network with priority messages when the incomes from transitions between its states depends on time // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2013. V. 1. № 3.