

СОВЕРШЕННЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ В $K_{1,4}$ -ОГРАНИЧЕННЫХ ГРАФАХ

П. А. Иржавский, Ю. Л. Орлович

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

E-mail: irzhavski@bsu.by; orlovich@bsu.by

Устанавливаются достаточные условия существования совершенного паросочетания в $K_{1,4}$ -ограниченных графах. Из этих условий, в частности, вытекает классический результат Ю. Петерсена о том, что в любом реберно 2-связном 3-регулярном графе существует совершенное паросочетание.

Ключевые слова: граф, $K_{1,4}$ -ограниченный граф, совершенное паросочетание, факторно-критический граф.

Введение

Паросочетанием в графе называется произвольное подмножество попарно не смежных ребер. Среди многочисленных направлений исследований в теории графов паросочетания занимают видное место. Задача нахождения наибольшего, в частности, совершенного паросочетания в графе имеет широкие практические и теоретические применения. Эта задача возникает, например, при проектировании коммуникационных сетей и размещении производственного оборудования, при планировании и оптимальной организации работы транспортных средств, при организации параллельных и конвейерных вычислений [1]. Теория паросочетаний инициировала исследование структурных и алгоритмических свойств графов и привела ко многим важным результатам. Современное состояние теории паросочетаний отражено в [2; 3].

В настоящей статье установлены новые достаточные условия существования совершенного паросочетания в $K_{1,4}$ -ограниченных графах. Здесь будет уместно отметить, что класс $K_{1,4}$ -ограниченных графов является расширением таких хорошо известных классов, как $K_{1,3}$ -свободные графы и 3-регулярные (кубические) графы.

Основные определения и известные результаты

Все графы, рассматриваемые в данной статье, являются *простыми*, т. е. конечными, неориентированными, без петель и кратных ребер. Стандартные понятия теории графов, не определяемые здесь, можно найти в [4].

Пусть G – граф. Через $V(G)$ обозначается множество вершин, через $E(G)$ – множество ребер графа G . Число $|V(G)|$ вершин графа G называется его *порядком*. Граф H называется *подграфом* графа G , если $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$. Подграф H графа G называется *порожденным подграфом*, если в графе H смежны любые две вершины $u, v \in V(H)$, смежные в графе G . Если H – порожденный подграф графа G и $V(H) = U$, то подграф H часто обозначают через $G(U)$ и говорят, что H – *подграф, порожденный множеством вершин* U . Обозначим для краткости $G - S = G(V \setminus S)$, где $S \subseteq V(G)$ и $V = V(G)$. Как обычно, через $K_{1,p}$ обозначается *звезда* – полный двудольный граф с долями мощности 1 и p . Граф называется *r -регулярным*, если степени

всех его вершин равны r , и (r, t) -регулярным, если множество степеней его вершин есть $\{r, t\}$ (здесь r и t – некоторые неотрицательные целые числа).

Для данного графа H граф G называется H -свободным, если он не содержит порожденных подграфов, изоморфных графу H . В частности, $K_{1,p}$ -свободный граф – это граф, который не содержит порожденных подграфов, изоморфных звезде $K_{1,p}$. Граф G называется $K_{1,p}$ -ограниченным ($p \geq 3$) [5], если для любого подграфа H графа G , изоморфного $K_{1,p}$, порожденный подграф $G(V(H))$ содержит по крайней мере $p + (p - 2)$ ребер. Легко видеть, что граф является $K_{1,3}$ -свободным тогда и только тогда, когда он $K_{1,3}$ -ограниченный. Очевидно, что при $k \geq 3$ всякий $K_{1,p}$ -ограниченный граф является также $K_{1,p+1}$ -ограниченным, но обратное, вообще говоря, неверно. Отсюда следует, что класс $K_{1,4}$ -ограниченных графов является естественным расширением класса $K_{1,3}$ -свободных графов.

Произвольное подмножество попарно несмежных ребер графа называется *паросочетанием*. *Реберным покрытием* графа G называется подмножество ребер $E' \subseteq E(G)$, покрывающее все вершины графа, т. е. для которого каждая вершина в графе G инцидентна по крайней мере одному ребру из E' . Паросочетание в графе называется *совершенным* (или *1-фактором*), если оно одновременно является реберным покрытием этого графа. Пусть s – целое число, $s \geq 1$. Граф G называется s -факторно-критическим, если для любого подмножества $S \subseteq V(G)$, $|S| = s$, в графе $G - S$ существует совершенное паросочетание. Если $s = 1$, то s -факторно-критический граф будем называть просто *факторно-критическим*. Заметим, что любой факторно-критический граф всегда связан и имеет нечетный порядок.

Изучение условий существования паросочетаний – одно из весьма популярных направлений теории графов. Первой работой, посвященной достаточным условиям существования совершенного паросочетания, была, по-видимому, статья [6] Ю. Петерсена 1891 г. Несмотря на столь почтенный возраст данной тематики, интерес к ней не ослабевает и сегодня.

Теорема (Ю. Петерсен [6]). В любом реберно 2-связном 3-регулярном графе существует совершенное паросочетание.

Следующий классический результат, установленный Ф. Беблером, является, по сути, обобщением теоремы Петерсена.

Теорема (Ф. Беблер [7]). В любом реберно $(r - 1)$ -связном r -регулярном графе четного порядка существует совершенное паросочетание.

Интересным усилением теоремы Беблера для случая регулярных графов четных степеней является следующий результат.

Теорема (Я. Плесник [8]). Пусть r – целое четное число, $r \geq 2$ и пусть G – реберно $(r - 1)$ -связный r -регулярный граф четного порядка. Тогда для любого подмножества $E' \subset E(G)$, $|E'| = r - 1$, в графе G существует совершенное паросочетание, непересекающееся с E' .

В несколько ином направлении проводил свои исследования совершенных паросочетаний Д. Самнер [9; 10]. Он рассмотрел достаточные условия существования совершенного паросочетания в графах, определяемых некоторыми запрещенными порожденными подграфами.

Теорема (Д. Самнер [9]). В любом связном $K_{1,3}$ -свободном графе четного порядка существует совершенное паросочетание.

Теорема (Д. Самнер [10]). В любом p -связном $K_{1,p+1}$ -свободном графе четного порядка существует совершенное паросочетание.

Некоторые обобщения результатов Самнера можно найти в [11; 12]. Следующая теорема, принадлежащая У. Татту, является наиболее значительным результатом среди всех, касающихся совершенных паросочетаний в графах общего вида.

Теорема (У. Татт [13]). В графе G совершенное паросочетание существует тогда и только тогда, когда для любого подмножества $S \subseteq V(G)$ верно неравенство $c_o(G - S) \leq |S|$, где $c_o(G - S)$ – число компонент нечетного порядка графа $G - S$.

В заключение этого раздела упомянем одну интересную характеристику, касающуюся s -факторно-критических графов.

Теорема (К. Ю [14]). Граф G является s -факторно-критическим тогда и только тогда, когда $|V(G)| \equiv s \pmod{2}$ и для любого подмножества $S \subseteq V(G)$, $|S| \geq s$, верно неравенство $c_o(G - S) \leq |S| - s$.

Новые достаточные условия

При исследовании достаточных условий существования совершенного паросочетания в $K_{1,4}$ -ограниченных графах нами получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть G – реберно 3-связный $K_{1,4}$ -ограниченный граф четного порядка. Тогда в графе G существует совершенное паросочетание.

При этом, несмотря на то, что свойство реберной 3-связности не является наследственным (не сохраняется при переходе к порожденному подграфу), этот результат можно распространить на графы нечетного порядка следующим образом.

Теорема 2. Пусть G – реберно 3-связный $K_{1,4}$ -ограниченный граф нечетного порядка. Тогда граф G является факторно-критическим.

Заметим, что существуют реберно 2-связные $K_{1,4}$ -ограниченные графы четного порядка, не содержащие совершенного паросочетания. В связи с этим вызывает обоснованный интерес дополнительное ограничение, например на степени вершин, при котором в реберно 2-связном $K_{1,4}$ -ограниченном графе четного порядка существует совершенное паросочетание.

Теорема 3. Пусть G – реберно 2-связный $K_{1,4}$ -ограниченный граф. Если степень каждой вершины графа G – нечетное число, то в этом графе существует совершенное паросочетание.

Теорема 3 обобщает приведенную выше теорему Петерсена, поскольку всякий 3-регулярный граф является $K_{1,4}$ -ограниченным. Также нами установлено следующее достаточное условие.

Теорема 4. Пусть G – реберно 2-связный $K_{1,4}$ -ограниченный граф. Если степень каждой вершины графа G не меньше шести, то в этом графе существует совершенное паросочетание.

Условия теорем 1, 3 и 4 неулучшаемы в том смысле, что существуют 4-регулярный и (5, 6)-регулярный реберно 2-связные $K_{1,4}$ -ограниченные графы, не содержащие совершенного паросочетания. Однако замена в теореме 4 условия реберной 2-связности на вершинную 2-связность позволяет понизить минимальную степень вершин, достаточную для существования в графе совершенного паросочетания.

Теорема 5. Пусть G – 2-связный $K_{1,4}$ -ограниченный граф. Если степень каждой вершины графа G не меньше четырех, то в этом графе существует совершенное паросочетание.

Отметим также, что согласно теореме 3 всякий 3-регулярный 2-связный $K_{1,4}$ -ограниченный граф содержит совершенное паросочетание; согласно теореме 5 всякий

4-регулярный 2-связный $K_{1,4}$ -ограниченный граф также содержит совершенное паросочетание. Тем не менее существует (3, 4)-регулярный 2-связный $K_{1,4}$ -ограниченный граф, не содержащий совершенного паросочетания.

Библиографические ссылки

1. Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. М. : Мир, 1998.
2. Akiyama J., Kano M. Factors and factorizations of graphs. Proof techniques in factor theory Berlin : Springer, Lecture Notes in Mathematics, 2011. V. 2031.
3. Yu Q. R., Liu G. Graph factors and matching extensions. Berlin : Springer, 2009. 353 p.
4. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов М. : Наука, 1990.
5. Wang J., Teng Y. $K_{1,p}$ -restricted graphs // Adv. Math. 2006. V. 35. P. 657–662.
6. Petersen J. Die Theorie der regulären graphs // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.
7. Bähler F. Über die Zerlegung regulärer Streckenkomplexe ungerader Ordnung // Comment. Math. Helv. 1938. V. 10. P. 275–287.
8. Plesník J. Remarks on regular factors of regular graphs // Czechoslovak Math. J. 1974. V. 24. P. 292–300.
9. Sumner D. P. Graphs with 1-factors // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 42. P. 8–12.
10. Sumner D. P. 1-factors and antifactor sets // J. London Math. Soc. II. Ser. 1976. V. 13. P. 351–359.
11. Ryjáček Z. Almost claw-free graphs // J. Graph Theory. 1994. V. 18. P. 469–477.
12. Abbas M., Benmeziane Z. Hamiltonicity in partly claw-free graphs // RAIRO, Oper. Res. 2009. V. 43. P. 103–113.
13. Tutte W. T. The factorization of linear graphs // J. London Math. Soc. 1947. V. 22. P. 107–111.
14. Yu Q. Characterizations of various matching extensions in graphs // Australas. J. Comb. 1993. V. 7. P. 55–64.