

К ВОПРОСУ ПРИВЕДЕНИЯ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ К ВИДУ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ПРЕОБЛАДАНИЕМ

В. К. Пчельник, И. Н. Ревчук

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Гродно, Беларусь

E-mail: irina.revchuk.54@mail.ru

В статье рассмотрены особенности реализации метода приведения квадратной матрицы к виду с диагональным преобладанием. Алгоритм реализован в электронных таблицах MS EXCEL.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), диагональное преобладание, электронные таблицы MS EXCEL.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$AX = B, \quad (1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, |A| \neq 0. \quad (2)$$

Как известно [1], для системы (1) метод итерации сходится, если выполнены неравенства (3).

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Приведем один из алгоритмов приведения матрицы A к виду с диагональным преобладанием. Пусть для заданной системы (1) выделены уравнения с коэффициентами, удовлетворяющими (3). Каждое такое уравнение записано в соответствующую строку новой системы (4) (наибольший по модулю элемент расположен на диагонали). Оставшиеся неиспользованные уравнения системы помещаем на свободные места системы (4).

$$A'X = B', \quad (4)$$

Предположим, что для уравнения с номером k , $1 \leq k \leq n$ в системе (4) не выполнено соотношение (3). Домножим каждое уравнение (4) на некоторые вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и потребуем, чтобы были выполнены условия в системе (5). Так как матрица A невырожденная, то система (5) имеет единственное решение.

(5)

$$1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 2n \ 1 \ \dots \ 1 \tag{6}$$

Исходная матрица А может располагаться на рабочем листе «исходные» в диапазоне N16:AG35, а столбец свободных членов – в диапазоне L16:L35. Для вещественной квадратной матрицы порядка 7 соответствующими диапазонами являются N16:T22 и L16:L22. В диапазон J16:J35 помещены 1, 0 или пробел в зависимости от необходимости приведения соответствующего уравнения исходной матрицы к виду с диагональным преобладанием. Это можно выполнить введением формулы (7) в ячейку J16 и распространением ее на оставшийся диапазон J17:J35). На рис. 2 приведена матрица, транспонированная к исходной. Ее перенос на рабочий лист «тр» осуществляется с помощью формулы (8).

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
14				B	7							
15						1	2	3	4	5	6	7
16	1	0		11	1	100	13	-7	-5	22	-5	0
17	2	0		18	2	11	200	1	16	-9	-3	-2
18	3	1		-18	3	0	-2	5	4	-3	15	-11
19	4	1		-4	4	4	-2	12	-1	2	3	-2
20	5	0		-21	5	-5	-4	-4	0	300	15	-2
21	6	1		-1	6	-4	-2	-5	-3	0	4	10
22	7	0		-6	7	-6	-1	3	17	-8	16	-150

Рис. 1. Размещение исходной матрицы на листе «исходные»

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
14					7							
15						1	2	3	4	5	6	7
16	1	0		11	1	100	11	0	4	-5	-4	-6
17	2	0		18	2	13	200	-2	-2	-4	-2	-1
18	3	1		-18	3	-7	1	5	12	-4	-5	3
19	4	1		-4	4	-5	16	4	-1	0	-3	17
20	5	0		-21	5	22	-9	-3	2	300	0	-8
21	6	1		-1	6	-5	-3	15	3	15	4	16
22	7	0		-6	7	0	-2	-11	-2	-2	10	-150

Рис. 2. Транспонированная матрица на листе «тр»

$$\{=\text{ЕСЛИ}(\text{M16}<>"";\text{ЕСЛИ}(\text{СУММ}(\text{ABS}(\text{СМЕЩ}(\$N\$16;\text{M16}-1;0;1;\$M\$14))))>2*\text{ABS}(\text{СМЕЩ}(\$N\$16;\text{M16}-1;\text{M16}-1;1;1));1;0);""\} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &=\text{ЕСЛИ}(\$M16<>"";\text{ЕСЛИ}(\text{ЕОШИБКА}(\text{ВПР}(\text{N\$15}; \\ &\text{СМЕЩ}(\text{исходные!}\$M\$16;0;0;\$M\$14;\$M\$14+1);\$M16+1));""; \\ &\text{ВПР}(\text{N\$15};\text{СМЕЩ}(\text{исходные!}\$M\$16;0;0;\$M\$14;\$M\$14+1);\$M16+1));"" \end{aligned} \quad (8)$$

Для получения обратной матрицы без выделения диапазона используем вспомогательную матрицу. Для этого в ячейку N37 вводим формулу (9) и распространяем ее на оставшуюся часть диапазона N37:AG56 (рис. 2). Здесь применяем функцию пользователя Mydet2 для получения соответствующего минора исходной матрицы. Собственно обратная матрица получена введением в ячейку N58 формулы (10) и последующим распространением ее на оставшуюся часть диапазона N58:AG77 (рис. 3). В ячейке L36 по формуле (11) вычисляется определитель исходной матрицы.

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
35									
36	540309590657		1	2	3	4	5	6	7
37	14	1	0,009556	-0,000725	0,009997	-0,004228	-0,000637	-0,014125	-0,001600
38		2	-0,000058	0,005267	-0,009551	0,012377	0,000036	0,022434	0,001960
39		3	-0,004327	0,000591	-0,002962	0,068885	-0,000231	-0,033023	-0,002908
40		4	-0,005273	-0,002687	0,122572	-0,156036	0,001924	-0,261195	-0,024311
41		5	-0,000016	0,000010	-0,002221	0,000451	0,003306	-0,003844	-0,000144
42		6	0,002231	0,001089	0,046903	0,009196	0,000299	0,066333	0,000842
43		7	-0,000827	-0,000183	0,018618	-0,015263	0,000094	-0,022567	-0,009332

	M	N	O	P	Q	R	S	T
57	обратная							
58		0,009556	-0,000058	-0,004327	-0,005273	-0,000016	0,002231	-0,000827
59		-0,0007255	0,0052669	0,0005911	-0,0026869	0,0000103	0,0010895	-0,0001831
60		0,0099967	-0,0095510	-0,0029624	0,1225722	-0,0022213	0,0469034	0,0186176
61		-0,0042284	0,0123767	0,0688845	-0,1560363	0,0004515	0,0091958	-0,0152630
62		-0,0006371	0,0000365	-0,0002313	0,0019238	0,0033058	0,0002992	0,0000943
63		-0,0141255	0,0224340	-0,0330226	-0,2611954	-0,0038437	0,0663332	-0,0225666
64		-0,0016002	0,0019603	-0,0029075	-0,0243110	-0,0001436	0,0008415	-0,0093317

Рис. 3. Получение обратной матрицы без использования встроенной функции МОБР

$$=ЕСЛИ(И(\$M16<>"";N\$15<>""),ЕСЛИ(ОСТАТ(\$M16+N\$15;2)=0;1;-1)*Mydet2(\$M\$14;СМЕЩ(\$N\$16;0;0;\$M\$14;\$M\$14);\$M16;N\$15)/\$L\$36;"")) \quad (9)$$

$$=ЕСЛИ(И(\$M37<>"";N\$36<>""),ГПР(\$M37;СМЕЩ(\$N\$36;0;0;\$M\$14+1;\$M\$14);N\$36+1);"")) \quad (10)$$

$$=МОПРЕД(СМЕЩ(\$N\$16;0;0;\$M\$14;\$M\$14)) \quad (11)$$

На рис. 4 приведена вспомогательная матрица, полученная по формуле (12).

	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
78		1	2	3	4	5	6	7	
79	1	14	1	1	1	1	1	1	
80	2	1	14	1	1	1	1	1	
81	3	1	1	14	1	1	1	1	
82	4	1	1	1	14	1	1	1	
83	5	1	1	1	1	14	1	1	
84	6	1	1	1	1	1	14	1	
85	7	1	1	1	1	1	1	14	

Рис. 4. Получение вспомогательной матрицы

$$=ЕСЛИ(И(\$M37<>"";N\$36<>""),ЕСЛИ(\$M37=N\$36;\$L\$37;1);"")) \quad (12)$$

В ячейку N100 вводим формулу (13) и распространяем ее на диапазон N100:AG119 (Рис. 5).

	M	N	O	P	Q	R	S	T
100				-0,0549697	-0,0672671		0,0302898	
101				0,0110467	-0,0315676		0,0175257	
102				0,1448435	1,7767933		0,7930992	
103				0,8108795	-2,1130911		0,0349266	
104				0,0017840	0,0298002		0,0086813	
105				-0,6752799	-3,6415262		0,6163458	
106				-0,0732900	-0,3515351		-0,0245527	

Рис. 5. Определение коэффициентов для соответствующих строк

$$=ЕСЛИ(И(\$M16<>"";N\$15<>""),ЕСЛИ(ВПР(N\$15;\$I\$16:\$J\$35;2;ЛОЖЬ)=1;СУММПРОИЗВ(СМЕЩ(\$N\$58;\$M16-1;0;1;\$M\$14);СМЕЩ(\$N\$79;N\$15-1;0;1;\$M\$14));"";"")) \quad (13)$$

В ячейку N121 вводим формулу (14) и распространяем ее на диапазон N121:AG140 (Рис. 6).

$$=ЕСЛИ(N100="";"";\$L16*N100) \quad (14)$$

В диапазоне N141:AG141 производится суммирование по формуле вида (15).

$$=ЕСЛИ(N121="";"";СУММ(СМЕЩ(N\$121;0;0;\$M\$14;1))) \quad (15)$$

	M	N	O	P	Q	R	S	T
121				-0,6046668	-0,7399378		0,3331882	
122				0,1988405	-0,5682159		0,3154633	
123				-2,6071825	-31,9822797		-14,2757849	
124				-3,2435181	8,4523644		-0,1397064	
125				-0,0374644	-0,6258034		-0,1823065	
126				0,6752799	3,6415262		-0,6163458	
127				0,4397399	2,1092108		0,1473160	
128								
129								
130								
131								
132								
133								
134								
135								
136								
137								
138								
139								
140								
141				-5,1789716	-19,7131354		-14,4181760	

Рис. 6. Определение свободных членов для измененных уравнений

Формула (16), введенная в ячейку N142 и распространенная далее на оставшуюся часть диапазона N142:AG161, выводит матрицу A' системы, эквивалентной матрице A системы (1), удовлетворяющую условиям вида (3) (рис. 7). Столбец свободных членов для преобразованной системы получен по формуле (17).

$$=ЕСЛИ(И($M21<>"";P$15<>"");ЕСЛИ(ВПП($M21;$I$16:$J$35;2;ЛОЖЬ)=1; ЕСЛИ($M21=P$15;2*$M$14;1),исходные!P21);"") \quad (16)$$

$$=ЕСЛИ(N142<>"";ЕСЛИ(ВПП($M16;$I$16:$J$35;2;ЛОЖЬ)=1; СМЕЩ($N$141;0;$M16-1;1;1);L16);"") \quad (17)$$

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
142	11		100	13	-7	-5	22	-5	0
143	18		11	200	1	16	-9	-3	-2
144	-5,178971559		1	1	14	1	1	1	1
145	-19,71313544		1	1	1	14	1	1	1
146	-21		-5	-4	-4	0	300	15	-2
147	-14,41817596		1	1	1	1	1	14	1
148	-6		-6	-1	3	17	-8	16	-150

Рис. 7. Вывод коэффициентов системы с диагональным преобладанием

На рис. 8 приведены решения обеих систем по методу обратной матрицы.

	AI	AJ
14		
15	исходная	с диагональным преобладанием
16	-0,0338639	-0,0338639
17	0,1816196	0,1816196
18	-0,2038495	-0,2038495
19	-1,3218621	-1,3218621
20	-0,0265321	-0,0265321
21	-0,9145576	-0,9145576
22	-0,2098820	-0,2098820

Рис. 8. Вывод решений исходной и преобразованной систем

Библиографические ссылки

1. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М. : Наука, 1966. С. 316–317.