

ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ю. М. Михалёнок

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

E-mail: mihalenok.yuri@gmail.com

Рассматривается задача оптимизации структуры портфеля финансовых активов с учетом институциональных ограничений в условиях неоднородных ожиданий инвесторов и неоднородности волатильности рынка. Для учета неоднородности ожиданий инвесторов при оценивании вектора ожидаемых доходностей используется модель Блэка – Литтермана. Для учета временной неоднородности ковариационной матрицы доходностей активов предлагается использовать эконометрическую модель ковариационной матрицы с динамическими корреляциями (DCC GARCH). Описывается инструментальная система для решения рассматриваемой задачи. Проводится экспериментальное исследование на основе разработанной инструментальной системы.

Ключевые слова: оптимизация структуры портфеля, неоднородные ожидания инвесторов, гетероскедастичность, инструментальная система.

Задача условной оптимизации структуры портфеля

Пусть портфель финансовых активов формируется на множестве из $N(N > 1)$ различных активов. Для периода владения t ($t = 1, \dots, T$) будем обозначать: $P_{t-1,i}, P_{t,i}$ – значения курса и актива i ($i = 1, \dots, N$) в начале и в конце периода соответственно; $r_{t,i} = \ln(P_{t,i} / P_{t-1,i})$ – логарифмическая доходность актива i (непрерывная ставка процентов), $r_t = (r_{t,i}) \in \mathbb{R}^N$ – случайный вектор доходностей активов. Структура портфеля определяется вектором $X = (x_i) \in \mathbb{R}^N$, $\sum_{i=1}^N x_i = 1$, где x_i – удельный вес актива i в портфеле.

Предполагается, что вектор r_t является условно-гауссовским, т. е. закон распределения данного вектора является нормальным, что обозначается

$$r_t | \mathfrak{I}_{t-1} \sim N_N(\mu_t, \Sigma_t), \quad (1)$$

где $\mathfrak{I}_{t-1}$ – информация, включающая значения вектора доходностей $\{r_\tau\} (\tau = 1, \dots, t-1)$, доступная к моменту времени $t-1$; $\mu_t = (\mu_{t,i}) = E\{r_t | \mathfrak{I}_{t-1}\} \in \mathbb{R}^N$ – условное математическое ожидание вектора доходностей активов r_t (вектор ожидаемых доходностей активов); $\Sigma_t = (\sigma_{t,ij}) = E\{(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)' | \mathfrak{I}_{t-1}\}$ – условная положительно определенная ковариационная матрица случайного вектора доходностей активов размерности $(N \times N)$.

Для каждого периода владения t ($t = 1, \dots, T$) будем рассматривать следующую задачу однопериодной оптимизации структуры портфеля финансовых активов [1]:

$$\sigma_t^2 = X' \Sigma_t X \rightarrow \min_{X \in \Omega}, t = 1, \dots, T, \quad (2)$$

где $\Omega \subset \mathfrak{R}^N$ – область допустимых значений вектора $X = (x_i) \in \mathfrak{R}^N$ в (2), определяемая множеством ограничений на структуру и ожидаемую доходность портфеля, представимая в виде

$$\Omega = \left\{ X \in \mathfrak{R}^N : x_i \in [v_i^-, v_i^+], x_i \geq 0, X' \mu_t \geq r_b, X' T = 1, \Delta x_i \in [v_i^-, v_i^+] \right\}, \quad (3)$$

где I – единичный N -вектор; r_{bt} – заданная минимальная приемлемая доходность портфеля активов, доходность эталонного показателя инвестора за t -й период владения; v_i^- и v_i^+ – соответственно нижние и верхние допустимые значения доли i -го актива в портфеле.

При решении задачи (2), (3) для каждого периода владения t ($t = 1, \dots, T$) на основе эконометрических моделей оцениваются (прогнозируются) ожидаемые доходности μ_t , а также условная ковариационная матрица доходностей активов $\Sigma_t = (\sigma_{t,ij}) = E \{ (r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)' | \mathfrak{I}_{t-1} \}$. Задача оптимизации структуры портфеля решается с помощью методов квадратичного программирования. При этом вместо неизвестных истинных значений вектора $\{\mu_t\}$ и матриц $\{\Sigma_t\}$ используются их статистические оценки $\{\hat{\mu}_t\}, \{\hat{\Sigma}_t\}$.

Экономические модели в задаче условной оптимизации структуры портфеля

Для учета неоднородности ожиданий инвесторов при оценивании вектора ожидаемых доходностей в качестве эконометрической модели используется модель Блэка – Литтермана [2]. В рамках данной модели предполагается, что условные математические ожидания вектора доходностей активов (вектора ожидаемых доходностей) $\mu_t \in \mathfrak{R}^N$ ($t = 1, \dots, T$) являются случайными векторами с некоторым неизвестным распределением вероятностей. Для построения распределения вектора ожидаемых доходностей $\mu_t \in \mathfrak{R}^N$ используется байесовский подход, в рамках которого апостериорное распределение вектора ожидаемых доходностей представляет собой комбинацию априорного распределения равновесных рыночных доходностей и распределения прогнозов инвесторов, относительно ожидаемых доходностей активов портфеля [3].

Относительно априорного распределения вектора ожидаемых доходностей $\mu_t \in \mathfrak{R}^N$ ($t = 1, \dots, T$) и распределения M прогнозов абсолютных (относительных) доходностей активов портфеля в модели Блэка – Литтермана принимаются предположения [3]:

$$\mu_t | \mathfrak{I}_{t-1} \sim N_N(\Pi_t, \Sigma_t), \quad (5)$$

$$P_t \mu_t | \mathfrak{I}_{t-1} \sim N_M(Q_t, \Omega_t), \quad (6)$$

где $\mathfrak{I}_{t-1}$ – информация, доступная к моменту времени $t-1$; $\Pi_t = (\pi_{t,i}) \in \mathfrak{R}^N$ – вектор равновесных рыночных доходностей; $\Sigma_{\Pi_t} = (\sigma_{\Pi_t,ij})$ – ковариационная матрица вектора равновесных рыночных доходностей активов размерности $(N \times N)$, $P_t = (p_{t,k,j})$ –

матрица размерности $(M \times N)$, идентифицирующая активы, относительно которых инвестором делаются прогнозы; $Q_t = (q_{t,k}) \in \mathbb{R}^M$ – вектор прогнозируемых инвестором доходностей активов; $\Omega_t = \text{diag}\{\varsigma_{t,k}\}$ – диагональная ковариационная матрица размерности $(M \times M)$, элементы которой характеризуют неопределенность относительно прогнозов инвестора.

Оценка вектора равновесных рыночных доходностей Π_t строится в предположении об эффективности рынка активов, входящих в портфель следующим образом [4]:

$$\hat{\Pi}_t = \lambda_t \Sigma_t X_{eqt},$$

где λ_t – коэффициент склонности инвестора к риску; $X_{eqt} = (x_{eqt,i})$ – вектор размерности $(N \times 1)$ нормированных удельных весов каждого из активов в общем объеме *равновесного (equilibrium)* эффективного рынка.

Коэффициент склонности инвестора к риску может быть рассчитан как

$$\lambda_t = \frac{(r_{bt} - r_{0t})}{\sigma_{eqt}^2},$$

где $\sigma_{eqt}^2 = X_{eqt}' \Sigma_t X_{eqt}$ – дисперсия равновесного рыночного портфеля.

Диагональные элементы $(\varsigma_{t,k}) k=1, \dots, M$ ковариационной матрицы Ω_t определяются следующим образом [3]:

$$\varsigma_{t,k} = p_{t,k} \Sigma_t p_{t,k}', k=1, \dots, M,$$

где $p_{t,k}$ – k -ый прогноз инвестора.

Относительно апостериорного распределения вероятности вектора ожидаемых доходностей μ_t в модели Блэка – Литтермана принимается предположение [3]:

$$\mu_t | \mathfrak{T}_{t-1} \sim N_N(\mu_{BLt}, \Sigma_{BLt}), \quad (7)$$

где $\mu_{BLt} \in \mathbb{R}^N$ – комбинированный вектор ожидаемых доходностей; Σ_{BLt} – ковариационная матрица комбинированного вектора ожидаемых доходностей размерности $(N \times N)$.

Оцениваемый комбинированный вектор ожидаемых доходностей μ_{BLt} определяется соотношением [3]:

$$\hat{\mu}_{BLt} = [X_{eqt} \Sigma_t^{-1} X_{eqt}' + P_t \Omega_t P_t']^{-1} [X_{eqt} \Sigma_t^{-1} \Pi_t + P_t \Omega_t^{-1} Q_t]. \quad (8)$$

Оценка ковариационной матрицы комбинированного вектора ожидаемых доходностей размерности будет определяться как [3]:

$$\hat{\Sigma}_{BLt} = \Sigma_t + \left[\Sigma_t^{-1} + P_t' \Omega_t^{-1} P_t \right]^{-1}. \quad (9)$$

Для учета временной неоднородности ковариационной матрицы доходностей активов предлагается при построении оценок ковариационных матриц $\{\hat{\Sigma}_t\}$ использовать эконометрическую модель ковариационной матрицы с динамическими корреляциями (DCC GARCH) [5].

Реализация инструментальной системы для решения задачи портфельной оптимизации

В рамках решения задачи портфельной оптимизации требуется решение задач построения и исследования альтернативных алгоритмов портфельной оптимизации на основе модельных и реальных исторических данных, а также решения задачи портфельной оптимизации в реальном времени.

Для решения указанных задач было разработано программное обеспечение, включающее в себя пакет модулей среды Matlab. Пакетом модулей решается задача построения и исследования альтернативных алгоритмов портфельной оптимизации на основе модельных и реальных исторических данных. На основе модулей с единым интерфейсом, реализующих алгоритмы портфельной оптимизации, возможно создание динамически загружаемых библиотек (*Dynamic Loaded Libraries – dll*), которые далее могут быть использованы при решении задачи оптимизации структуры портфеля в реальном времени.

Результаты экспериментальных исследований алгоритмов портфельной оптимизации на основе инструментальной системы

На основе разработанной инструментальной системы проведены экспериментальные исследования. Целью экспериментов является сравнительный анализ альтернативных алгоритмов оптимизации структуры портфеля финансовых активов на основе тестовых данных.

Для формирования структуры портфеля используются следующие алгоритмы.

Базовый алгоритм формирования структуры портфеля (A1). Состоит в установлении структуры портфеля в пропорциях, соответствующих рыночным капитализациям выбранных компонент эталонного показателя.

Алгоритм на основе подхода доходность – риск (A2). Заключается в решении задачи (2), (3), где в качестве оценки вектора ожидаемых доходностей портфеля используется среднее значение по всей реализации временного ряда доходностей, а для построения оценок ковариационных матриц используется модель динамических условных корреляций (DCC) [4].

Алгоритм на основе модели Блэка – Литтермана (A3). Состоит в решении задачи (2), (3), где оценка вектора ожидаемых доходностей портфеля строится на основе формулы (8), а оценка ковариационной матрицы строится на основе модели DCC и формулы (9).

Статистическое моделирование тестовых данных проведено на основе многомерной модели условной гетероскедастичности DCC GARCH. Для моделирования используется пакет модулей UCSD Toolbox среды Matlab.

При построении матриц $\{P_t\}(t=1, \dots, T)$ и векторов прогнозов $\{Q_t\}(t=1, \dots, T)$ делается допущение о том, что в каждый момент времени $t(t=1, \dots, T-1)$ инвестор имеет достоверные ожидания относительно доходностей активов. Таким образом, матрица $\{P_t\} = \{(p_{t,i})\}$, где $p_{t,k} = 1$, $p_{t,l} = -1$, $p_{t,j} = 0$ ($k = \arg \max_i r_{t+1,i}$, $l = \arg \min_i r_{t+1,i}$, $j \notin \{k, l\}$, $t=1, \dots, T-1$) вырождается в вектор размерности $(1 \times N)$.

Вектор прогнозов ожидаемых доходностей $\{Q_t\} = \{(q_t)\} (t=1, \dots, T)$ вырождается в скалярные значения прогнозируемых относительных доходностей $q_t = r_{t+1,k} - r_{t+1,l}$.

Эксперименты проводятся на тестовых данных $\{r_t\} \in \mathbb{R}^N$ $N=10$, $t=1, \dots, 1500$. Для сравнительного анализа алгоритмов A1, A2, A3 проводятся имитационные эксперименты на модельных данных для наблюдений $\{r_t\} t=301, \dots, 1500$. При построении статистических оценок $\{\hat{\mu}_t\}, \{\hat{\Sigma}_t\}$, применяемых при решении задачи (2), (3) в алгоритмах A2, A3 в качестве исходной информации $\mathfrak{Z}_1$ используются наблюдения $\{r_t\} t=1, \dots, 300$. На последующих шагах имитационного эксперимента объем исходных данных увеличивается и включает предыдущие наблюдения.

В табл. 1 представлены характеристики инвестиционной эффективности стратегий A1, A2, A3: средняя доходность портфелей ($\bar{\mu}$), средний риск портфеля, выраженный средним стандартным отклонением доходности ($\bar{\sigma}$), и среднее значение индекса Шарпа (SI). Согласно приведенным в табл. 1 значениям средних доходностей и индексов Шарпа наибольшей инвестиционной эффективностью среди альтернативных алгоритмов обладает алгоритм на основе модели Блэка – Литтермана.

Таблица 1

Характеристики инвестиционной эффективности алгоритмов A1, A2, A3

Алгоритм	$\bar{\mu}$	$\bar{\sigma}$	SI
A1	0.33451	1.29416	0.25847
A2	0.36838	0.33384	1.10346
A3	1.18787	0.35329	3.36231

Таким образом, разработанная инструментальная система позволяет решить комплекс задач, возникающих в процессе управления рисками портфеля финансовых активов. В результате проведенных исследований показано, что при решении задачи оптимизации (2), (3) целесообразно использование алгоритма A3, учитывающего неоднородность ожиданий инвесторов относительно будущих доходностей.

Библиографические ссылки

1. Малюгин В. И. Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа. М.: Дело, 2003.
2. Black F., Litterman R. Global portfolio optimization // Financial Analysis Journal. 1992. V. 48. № 5. P. 28–43.
3. Meucci A. Risk and Asset Allocation // New York. Springer-Verlag; Berlin; Heidelberg, 2005.
4. Sharpe W. F. Imputing Expected Security Returns from Portfolio Composition // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1974. V. 9. № 3. P. 463–472.
5. Engel R. F. Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class Of Multivariate GARCH Models // Journal of Business and Economic Statistics. 2002. V. 20. № 3. P. 339–350.