

## **ЛИНЕЙНЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВА ЦИКЛА В ЛОКАЛЬНО СВЯЗНОМ ГРАФЕ ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКИ**

An efficient linear time and space algorithm for finding a hamiltonian cycle in a locally connected triangular grid graph is presented.

В теории графов под *решеткой* обычно понимают плоский геометрический граф, соответствующий регулярному замощению плоскости конгруэнтными правильными многоугольниками (треугольниками, квадратами или шестиугольниками) [1]. Конечный порожденный подграф решетки называется *графом решетки*.

Графы решеток находят многочисленные практические применения в компьютерной графике, вычислительной геометрии и робототехнике. Здесь также уместно подчеркнуть, что задачи, при математическом описании которых модель в виде графа решетки оказывается наиболее подходящей, возникают в распознавании образов, молекулярной биологии [2] и при проектировании сетей сотовой связи [3].

Исследованию циклических свойств графов решеток посвящена обширная литература (см., например, библиографию в [4]). Естественным образом возникает задача о гамильтоновости графов решетки. В [5] показано, что для графов квадратной решетки эта задача является NP-полной. Известно также [6], что задача разрешима за полиномиальное время, если класс графов квадратной решетки сузить до *сплошных графов*, т. е. графов квадратной решетки, грани которых (за исключением внешней) не содержат строго внутри себя других вершин решетки.

Задача распознавания гамильтоновости остается NP-полной для графов треугольной [7] и шестиугольной [8] решеток. В то же время эта задача полиномиально разрешима для локально связанных графов треугольной решетки [7, 9]. Заметим, что связанные локально связанные графы треугольной решетки (за исключением одного графа) обладают более сильными циклическими свойствами [10], чем гамильтоновость и, в частности, содержат все связанные линейно-выпуклые [11] и связанные сплошные графы треугольной решетки. Единственное исключение – это локально связанный граф треугольной решетки, приведенный на рис. 1 а (граф  $D$ ). Отсутствие гамильтонова цикла в графе  $D$  следует из того, что этот 13-вершинный граф содержит множество из семи попарно несмежных вершин, а простой цикл длины 13 может содержать не более шести таких вершин. Вопрос о сложности задачи распознавания гамильтоновости для сплошных графов шестиугольной решетки остается открытым [4].

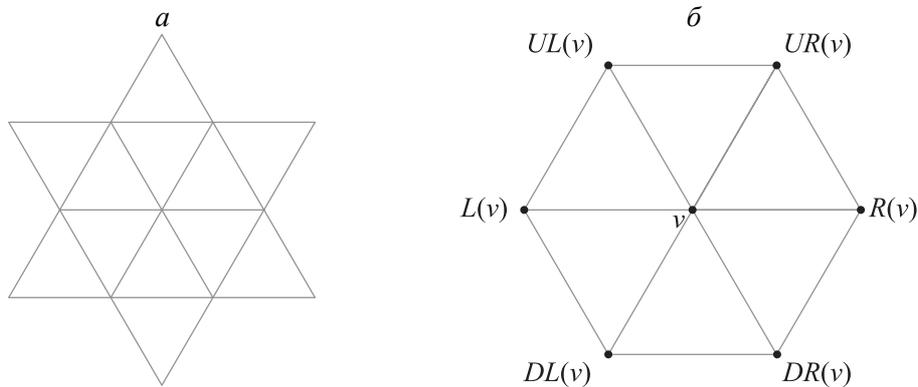


Рис. 1. Граф  $D$  (а) и окружение вершины  $v$  графа  $T^\infty$  (б)

Целью настоящей работы является новое конструктивное доказательство существования гамильтонова цикла в связном локально связном графе треугольной решетки, неизоморфном графу  $D$ , и разработка на основе этого доказательства эффективного линейного алгоритма построения гамильтонова цикла в таком графе.

**Основные определения.** Далее под *графом* (если дополнительно не оговорено) понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Все термины и обозначения, употребляемые нами без определения, можно найти в [12]. Пусть  $G$  – граф с множеством вершин  $V(G)$  и множеством ребер  $E(G)$ . Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены простой цепью. Подмножество всех вершин графа  $G$ , смежных с вершиной  $u$ , называется *окружением* вершины  $u$  и обозначается через  $N_G(u)$  или просто  $N(u)$ . Подграф графа  $G$ , порожденный множеством  $U \subseteq V(G)$ , обозначается через  $G(U)$ . Граф  $G$  называется *локально связным*, если окружение  $N(u)$  каждой его вершины  $u$  порождает связный граф  $G(N(u))$ . Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется *гамильтонов цикл*, т. е. простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа.

Обозначим через  $T^\infty$  бесконечный плоский граф, соответствующий регулярному замощению плоскости  $\mathbf{R}^2$  конгруэнтными правильными треугольниками. Вершинами графа  $T^\infty$  являются точки плоскости с декартовыми координатами  $(x + y/2, y\sqrt{3}/2)$ , где  $x$  и  $y$  – целые числа. Две вершины смежны в  $T^\infty$  тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между соответствующими точками равно 1. Будем считать, что  $T^\infty$  – геометрический граф, т. е. граф, уложенный на плоскости так, что каждое его ребро представляет собой замкнутый прямолинейный отрезок. Такое вложение графа  $T^\infty$  в  $\mathbf{R}^2$  будем называть *каноническим*. Заметим, что окружение каждой вершины  $v$  графа  $T^\infty$  содержит шесть вершин-соседей. Обозначим эти вершины в соответствии с рис. 1 б. Например, запись  $u = UR(v)$  означает, что вершина  $u$

является правым верхним (up-right) соседом вершины  $v$ . Произвольный конечный порожденный подграф графа  $T^\infty$  называется *графом треугольной решетки*.

Пусть  $G$  – плоский граф и  $C$  – простой цикл этого графа. Обозначим через  $\text{Int}_G(C)$  или просто  $\text{Int}(C)$  подмножество вершин графа  $G$ , которые лежат строго внутри области, ограниченной циклом  $C$ . Отметим, что  $\text{Int}(C) \subseteq V(G) \setminus V(C)$ . Если простая цепь  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  является частью цикла  $C$ , то будем писать  $u_1 u_2 \dots u_k \subset C$ .

**Основная теорема.** Всюду в этом разделе будем считать, что граф треугольной решетки является плоским и его плоское вложение наследовано каноническим вложением графа  $T^\infty$  в  $\mathbf{R}^2$ .

Пусть далее  $G$  – связный локально связный граф треугольной решетки,  $|V(G)| \geq 3$ . Поскольку каждый связный локально  $k$ -связный граф является  $(k+1)$ -связным [13], то  $G$  – двусвязный граф. Рассмотрим границу  $\delta G = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$  графа  $G$ , т. е. набор простых циклов, где  $C_0$  – цикл, соответствующий границе внешней грани, а  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , – циклы, соответствующие границам только тех внутренних граней, которые содержат строго внутри себя хотя бы одну вершину графа  $T^\infty$ .

**Лемма 1.** В графе  $T^\infty$  не найдется таких трех попарно смежных вершин  $a$ ,  $b$  и  $c$ , что для некоторого  $1 \leq i \leq k$  выполняется  $abc \subset C_i$  (например, см. рис. 1 б при  $a = UR(v)$ ,  $b = v$ ,  $c = R(v)$ ).

Доказательство. Заметим, что поскольку  $a, c \in V(G)$ , то (так как граф  $G$  является порожденным подграфом графа  $T^\infty$ ) имеем  $ac \in E(G)$ . Тогда получаем, что грань, границей которой выступает цикл  $C_i$ , является треугольником, что противоречит определению. Лемма доказана.

Следующее простое утверждение вытекает из локальной связности графа  $G$  и леммы 1.

**Лемма 2.** Любые два цикла из множества  $\delta G$  не пересекаются по вершинам.

**Теорема 3.** Пусть  $G$  – связный локально связный граф треугольной решетки, неизоморфный графу  $D$ . Тогда  $G$  – гамильтонов граф.

Доказательство теоремы является конструктивным. Оно основывается на следующей идее. Рассмотрим границу графа  $G$ :  $\delta G = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ . Положим  $C = C_0$ . Будем строить искомым гамильтонов цикл, итерационно расширяя цикл  $C$ , т. е. включая в него на каждом шаге либо некоторую вершину из  $\text{Int}(C)$ , либо сразу все вершины некоторого цикла из  $\delta G$ . В этом случае лемма 2 гарантирует, что для любого  $i = 1, 2, \dots, k$  после каждого шага либо все вершины цикла  $C_i$  уже содержатся в  $V(C)$ , либо  $V(C_i) \cap V(C) = \emptyset$ . Расширение цикла  $C$  будем проводить так, чтобы выполнялось следующее условие:

Цикл  $C$  является простым и, кроме того, ограничивает множество вершин графа  $G$ , т. е.  $V(G) = \text{Int}(C) \cup V(C)$ . (\*)

**Лемма 4.** Пусть  $C$  – некоторый конечный простой цикл в графе  $T^\infty$ . Тогда если  $A = \text{Int}(C) \setminus V(C) \neq \emptyset$ , то в множестве  $A$  найдется такая вершина  $v$ , что вершины  $UL(v)$ ,  $L(v)$  и  $DL(v)$  лежат на цикле  $C$ .

Доказательство. Каноническое вложение  $T^\infty$  в  $\mathbf{R}^2$  позволяет говорить об относительном положении вершин (например, « $u$  находится левее  $v$ »).

Рассмотрим самую левую вершину  $v \in A$  (она существует в силу конечности  $A$ ). Покажем, что  $v$  является искомой. Действительно, пусть  $u \in \{UL(v), L(v), DL(v)\}$  и  $u \notin V(C)$ . В таком случае вершина  $u$  принадлежит множеству  $\text{Int}(C)$ , а значит, и множеству  $A$ , но в то же время находится левее  $v$ . Противоречие.

**Лемма 5.** Пусть цикл  $C$ , удовлетворяющий описанному выше условию (\*), не является гамильтоновым. Тогда  $C$  можно расширить, т. е. существует такой простой цикл  $C^*$ , что  $V(C) \subset V(C^*) \subseteq V(G)$ .

Доказательство. Пусть  $v$  – такая вершина, что  $v \in V(G) \setminus V(C)$  и  $UL(v), L(v), DL(v) \in V(C)$ . Существование вершины  $v$  следует из леммы 4. Введем следующие обозначения:  $a = UL(L(v))$ ,  $b = UR(a)$ ,  $c = R(b)$ ,  $d = UL(v)$  (где  $a, b, c, d$  рассматриваются как вершины графа  $T^\infty$ ).

*Случай 1.* Пусть  $v \in C_i$ , где  $1 \leq i \leq k$ . Поскольку  $C_i$  по построению не может содержать ни одну из вершин  $UL(v)$ ,  $L(v)$  и  $DL(v)$ , то в силу леммы 1 имеем, что  $UR(v)vDR(v) \subset C_i$ .

Пусть  $dL(v) \subset C$ , тогда  $C$  можно расширить, объединив его с  $C_i$ : удаляя ребра  $dL(v)$  из  $C$  и  $vUR(v)$  из  $C_i$  и добавляя ребра  $dUR(v)$  и  $L(v)v$ . Аналогично поступаем, если  $DL(v)L(v) \subset C$ .

Поскольку в каждом из трех оставшихся вариантов прохождения цикла  $C$  через вершину  $L(v)$  цикла  $C$  принадлежит по крайней мере одно из ребер  $L(v)a$  и  $L(v)DL(L(v))$ , то в силу симметричности рассматриваемой конфигурации без потери общности будем считать, что  $L(v)a \subset C$  (рис. 2 а). Если  $dc \subset C$ , то цикл  $C$  можно расширить, как и выше. Иначе  $L(v)adb \subset C$  (рис. 2 б). Тогда снова можно объединить циклы  $C$  и  $C_i$ , удаляя ребра  $L(v)a$ ,  $db$ ,  $vUR(v)$  и добавляя  $L(v)v$ ,  $UR(v)d$ ,  $ab$ .

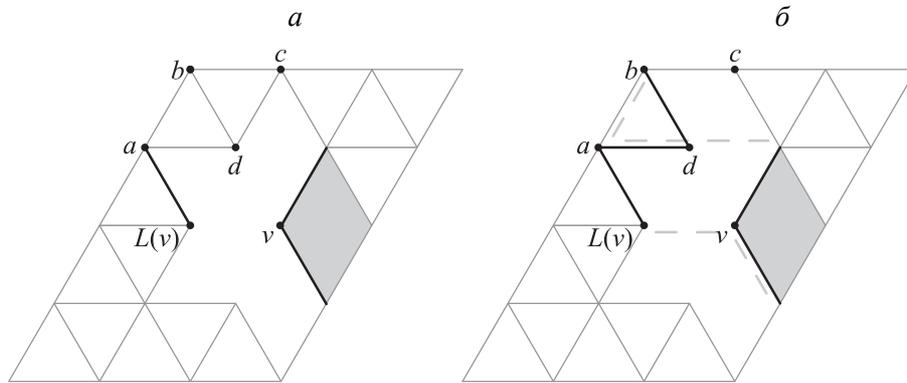


Рис. 2. Лемма 5. Случай 1

Кроме того, несложно убедиться, что условие (\*) в результате преобразований не нарушилось.

*Случай 2.* Пусть  $v \notin C_i$  для любого  $i = 1, 2, \dots, k$ . Если хотя бы одно ребро графа  $T^\infty(N_{T^\infty}(v))$  принадлежит циклу  $C$ , то он может быть тривиально расширен за счет включения вершины  $v$ . Иначе без потери общности будем считать, что  $L(v)a \subset C$  (рис. 3 а). Тогда ребрами цикла  $C$ , инцидентными вершине  $d$ , могут быть либо  $cd$  и  $db$ , либо  $bd$  и  $da$ , либо  $cd$  и  $da$ .

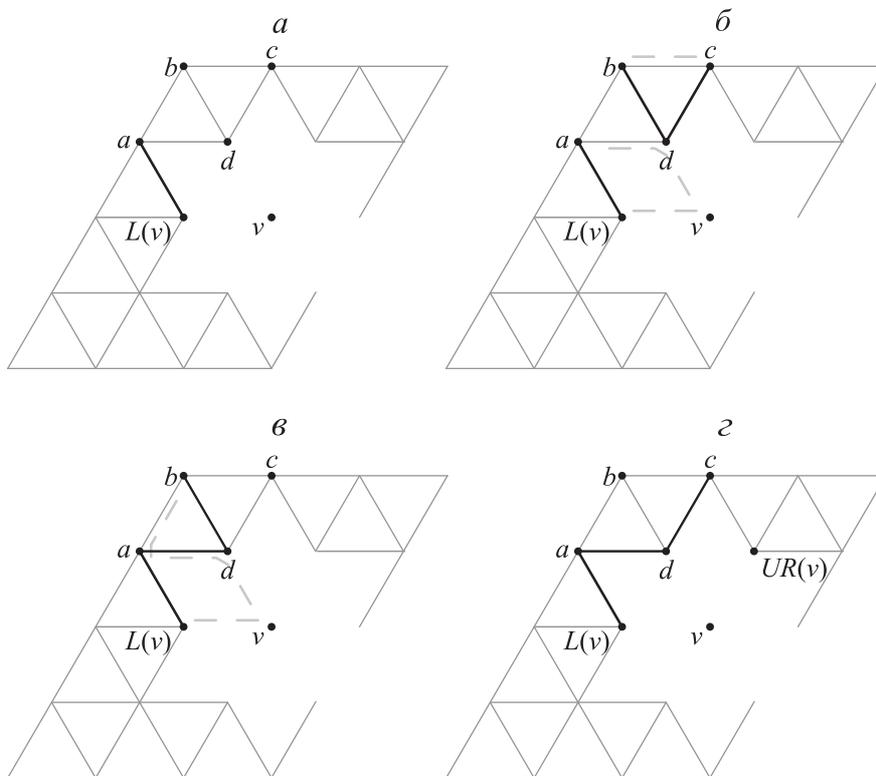


Рис. 3. Лемма 5. Случай 2

Если  $cdb \subset C$ , то цикл  $C$  может быть расширен после замены ребра  $L(v)a$  на цепь  $L(v)vda$  и цепи  $bdc$  на ребро  $bc$  (рис. 3 б).

Если  $bda \subset C$ , то  $C$  можно расширить заменой цепи  $L(v)adb$  на цепь  $L(v)vdab$  (рис. 3 в).

Осталось рассмотреть случай  $cda \subset C$  (рис. 3 з).

Пусть  $UR(v) \notin V(C)$ . Если  $UR(v) \notin V(C_i)$  для любого  $i=1, 2, \dots, k$ , то цикл  $C$  можно расширить заменой ребра  $dc$  на цепь  $dvUR(v)c$ . Иначе, если  $UR(v) \in V(C_i)$  для некоторого  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , то в силу того, что  $C_i$  не может содержать вершины  $v$  и  $c$ , учитывая лемму 1, имеем, что  $R(c)UR(v)R(v) \subset C_i$ . Тогда  $C$  можно объединить с циклом  $C_i$  путем удаления ребер  $dc$  из  $C$  и  $UR(v)R(c)$  из  $C_i$  и добавления ребер  $cR(c)$  и  $dUR(v)$ .

Несложно убедиться в том, что в результате проделанных операций условие (\*) не нарушилось.

Пусть теперь  $cda \subset C$  и  $UR(v) \in V(C)$ . После выполнения поворота на угол  $\pi/3$  против часовой стрелки вокруг вершины  $v$ , вершины  $c, d, a$  и  $L(v)$  перейдут соответственно в вершины  $c^* = a, d^* = L(v), L(DL(v))$  и  $DL(v)$ , а вершина  $UR(v)$  перейдет в вершину  $UR^*(v) = UL(v)$ . Поскольку после поворота  $v \notin C_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ),  $L(v)a = d^*c^* \subset C$  и  $UL(v) = UR^*(v) \in V(C)$ , то мы снова находимся в рамках случая 2. Поэтому, применив предыдущие рассуждения, мы либо расширим цикл  $C$ , либо установим, что  $cda \subset C$  (это соответствует  $cUR(v)R(UR(v)) \subset C$  в случае до поворота) и  $UR(v) \in V(C)$ . Таким образом, мы снова пришли к рассматриваемой конфигурации. Последовательно повторяя указанный поворот, мы либо расширим цикл  $C$ , либо еще через четыре поворота придем к ситуации, когда

$$C = L(v)adcUR(v)R(UR(v))R(v)R(DR(v))DR(v)DL(DR(v))DL(v)L(DL(v))L(v),$$

а следовательно, граф  $G$  изоморфен графу  $D$ .

Лемма 5 завершает доказательство теоремы 3.

**Описание алгоритма.** Заметим, что доказательство леммы 5 приводит к линейному алгоритму построения гамильтонова цикла в графе  $G$ . Остановимся на описании такого алгоритма.

На вход алгоритма подается связный локально связный граф треугольной решетки  $G$ , заданный множеством вершин  $V(G)$  (где  $|V(G)| \geq 3$ ) и множеством ребер  $E(G)$ .

Первым этапом работы алгоритма является построение вложения графа  $G$  в  $T^\infty$ , что сводится к вычислению для каждой вершины  $v$  элементов  $UL(v), L(v), DL(v), DR(v), R(v), UR(v)$ . Заметим, что в общем случае вложение определяется не однозначно, а с точностью до поворота и симметрии относительно прямой. Однако вложение некоторой вершины  $v$  вместе с ее окружением  $N(v)$  однозначно доопределяется до искомого вложения. Чтобы пояснить данный факт, заметим, что вложение вершины  $u$  вместе с вложением каких-либо двух смежных вершин из  $N(u)$  доопределяет вложение всего  $N(u)$ . Тогда, построив вложение вершины  $v$  вместе с ее окружением  $N(v)$ , можно достроить вложение  $N(u)$  всех вершин  $u$ , смежных с  $v$ , аналогично для вершин, смежных с  $u$ , и т. д. (в результате таких действий будет построено вложение всего графа  $G$ , поскольку он является связным).

Кроме того, требуется рассматривать множество симметричных случаев. Они могут быть представлены как вложения, отличные от уже построенного. Такие вложения изменяют лишь нумерацию окружений вершин следующим образом: нумерация  $(UL^*(v), L^*(v), DL^*(v), DR^*(v), R^*(v), UR^*(v))$  в другом вложении является некоторой перестановкой  $\sigma_v \in S_6$  (где  $S_6$  – симметрическая группа степени 6) элементов исходной нумерации  $(UL(v), L(v), DL(v), DR(v), R(v), UR(v))$ . Кроме того, легко заметить, что такая перестановка будет одинаковой для всех вершин графа  $G$ . Обозначим данную перестановку  $\sigma$ . Тогда рассмотрение симметричных случаев можно проводить общим методом, использующим  $\sigma$  при обращении к элементам окружения любой вершины. Обозначим  $ROT(\sigma)$  перестановку, соответствующую вложению, образованному из вложения  $\sigma$  (с данного момента для удобства изложения мы отождествляем перестановку и соответствующее ей вложение) поворотом на угол  $\pi/3$  против часовой стрелки, а  $FLIP(\sigma)$  – отражение вложения  $\sigma$  относительно оси абсцисс.

На втором этапе алгоритма выполняется построение границы  $\delta G = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ . Циклы  $C_i$  будем хранить в виде двусвязного списка вершин. Кроме того, будем поддерживать список  $Q$  вершин  $v \notin V(C)$ , для которых  $UL(v), L(v), DL(v) \in V(C)$ .

Под операцией *переключения ребер*  $v_1v_2$  и  $u_1u_2$ , принадлежащих двум различным циклам в  $G$ , будем понимать объединение данных циклов в один новый путем удаления указанных ребер и добавления ребер  $v_1u_1, v_2u_2$ . Отметим, что операция корректно определена только в том случае, когда  $v_1u_1, v_2u_2 \in E(G)$ . Тогда в соответствии с леммой 5 описание алгоритма будет иметь следующий вид:

```

1 Построение вложения  $G$  в  $T^\infty$ 
2 Построение  $\delta G = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ 
3  $\sigma \leftarrow id$  (единичная перестановка)
4  $C \leftarrow C_0$ 
5 Инициализация и начальное заполнение списка  $Q$ 
6 Expansion: while  $Q$  не пусто do
7   Извлечь из  $Q$  очередную вершину  $v$ 
8   if  $v$  уже лежит на  $C$  then continue Expansion
9   if  $v$  лежит на некотором  $C_i$  then //  $C_i$  и  $C$  будут объединены
10    if  $UL(v)L(v) \in E(C)$  then
11      Переключить ребра  $L(v)UL(v)$  и  $vUR(v)$  циклов  $C$  и  $C_i$  соответственно
12    else if  $L(v)DL(v) \in E(C)$  then
13      Переключить ребра  $DL(v)L(v)$  и  $DR(v)v$  циклов  $C$  и  $C_i$  соответственно
14    else
15      if  $L(UL(v))L(v) \notin E(C)$  then
16         $\sigma \leftarrow FLIP(\sigma)$ 
17         $d \leftarrow UL(v)$ ,  $e \leftarrow L(v)$ ,  $a \leftarrow L(d)$ ,  $b \leftarrow UL(d)$ ,  $c \leftarrow UR(d)$ 
18      if  $dc \in E(C)$  then
19        Переключить ребра  $dc$  и  $vUR(v)$  циклов  $C$  и  $C_i$  соответственно
20      else
21        Заменить  $eadb$  и  $UR(v)R(v)$  на  $ev$  и  $UR(v)dab$  соответственно
22    else // Вершина  $v$  будет включена в  $C$ 
23      for  $i = \overline{1,6}$  do
24        if  $UR(v)UL(v) \in E(C)$  then
25          Заменить ребро  $UL(v)UR(v)$  на цепь  $UL(v)vUR(v)$ 
26          continue Expansion
27         $\sigma \leftarrow ROT(\sigma)$ 
28      if  $L(UL(v))L(v) \in E(C)$  then
29         $\sigma \leftarrow FLIP(\sigma)$ 
30      for  $i = \overline{1,6}$  do
31         $d \leftarrow UL(v)$ ,  $e \leftarrow L(v)$ ,  $a \leftarrow L(d)$ ,  $b \leftarrow UL(d)$ ,  $c \leftarrow UR(d)$ 
32      if  $db \in E(C)$  then
33        if  $cd \in E(C)$  then Заменить  $bdc$  и  $ea$  на  $bc$  и  $evda$  соответственно
34        else Заменить цепь  $eadb$  на  $evdab$ 
35        continue Expansion
36      else if  $R(d)$  не лежит ни на  $C$ , ни на одном из  $C_i$  then
37        Заменить  $dc$  на  $dvR(d)c$ 
38        continue Expansion
39      else if  $R(d)$  не лежит на  $C$  then
40        Переключить ребра  $dc$  и  $R(d)R(c)$  циклов  $C$  и  $C_i$  соответственно
41        continue Expansion
42       $\sigma \leftarrow ROT(\sigma)$ 
43    exit (идентифицирован граф  $D$ )
44     $\sigma \leftarrow id$ 
45  for all  $u$  таких, что  $u$  добавлена в  $C$  на данной итерации do
46    Проверить  $UR(u)$ ,  $R(u)$ ,  $DR(u)$  на необходимость включения в  $Q$ 

```

**Теорема 6.** *Задача нахождения гамильтонова цикла в связном локально связном графе треугольной решетки с числом вершин  $n \geq 3$ , отличным от графа  $D$ , разрешима за время  $O(n)$  с использованием памяти  $O(n)$ .*

Доказательство. Корректность алгоритма следует из леммы 5. Покажем, что алгоритм может быть реализован таким образом, что время выполнения и размер требуемой памяти будут линейными.

Первый этап (построение вложения, строка 1 описания алгоритма) может быть реализован следующим образом. Для любой вершины строится ее вложение вместе с  $N(v)$ . Затем можно построить вложения  $N(u)$  для всех  $u \in N(v)$  и т. д. Таким образом, вложение может быть построено при помощи просмотра графа в глубину из вершины  $v$ . Вложение  $N(u)$  строится за  $O(1)$ , поэтому весь этап будет выполнен за  $O(n)$ .

Циклы  $C_i$  будут храниться следующим образом. Для каждой вершины определим номер цикла, которому она принадлежит (и  $-1$  как идентификатор того, что вершина не принадлежит ни одному из циклов), и указатели на предыдущую и следующую вершины в обходе цикла. Данная конструкция позволяет за  $O(1)$  находить цикл, на котором лежит данная вершина, и производить все модификации, применяемые в алгоритме для объединения циклов и добавления вершины в цикл.

Построение циклов  $C_i$  (строка 2 описания алгоритма) может быть выполнено также за линейное время. На данных циклах будут лежать в точности те вершины  $v$ , степень которых отлична от 6. И для каждой из них за  $O(1)$  (просмотром окружения  $N(v)$ ) могут быть найдены смежные по циклу вершины. Заметим, что данный этап может быть совмещен с этапом построения вложения.

Поскольку каждая вершина будет добавлена в  $C$  ровно один раз, то проверка на добавление новых вершин в  $Q$  (строка 46 описания алгоритма) будет проведена  $O(n)$  раз за время работы алгоритма.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Автор благодарит Ю.Л. Орловича за существенную помощь в подготовке статьи.

1. Grünbaum B. Convex Polytopes. Springer, 2003.
2. Agarwala R., Batzoglou S., Dančik V. et al. // J. Comput. Biology. 1997. Vol. 4. P. 275.
3. Havet F. // Discrete Math. 2001. Vol. 233. P. 219.
4. Arkin E.M., Fekete S.P., Islam K. et al. // Comput. Geom. Theory Appl. 2009. Vol. 42. P. 582.
5. Itai A., Papadimitriou C.H., Szwarcfter J.L. // SIAM J. Comput. 1982. Vol. 11. P. 676.
6. Umans C., Lenhart W. // Proc. 38th Symp. FoCS. 1997. P. 496.
7. Орлович Ю.Л., Гордон В.С., Вернер Ф. // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49. № 5. С. 21.
8. Islam K., Meijer H., Rodriguez Y.N. et al. // Proc. 19th Canadian Conference on Computational Geometry. 2007. P. 85.
9. Polishchuk V., Arkin E.M., Mitchell J.S.B. // Proc. 18th Canadian Conference on Computational Geometry. 2006. P. 63.
10. Gordon V.S., Orlovich Yu.L., Werner F. // Discrete Math. 2008. Vol. 308. P. 6166.
11. Reay J.R., Zamfirescu T. // Discrete Comput. Geom. 2000. Vol. 24. P. 497.
12. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М., 1990.
13. Chartrand G., Pippert R. // Časopis Pěst. Mat. 1974. Vol. 99. P. 158.

Поступила в редакцию 07.05.10.

**Филипп Валерьевич Пронин** – студент 5-го курса факультета прикладной математики и информатики.