УДК 517.5

Е.Г. МИКУЛИЧ

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИИ |sin *x*| ЧАСТНЫМИ СУММАМИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО РАЦИОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

Approximation by rational Fourier series for |sin *x*| and the behavior of their uniform approximations are investigated. Previously in 1989, in papers by E.A. Rovba similar approximation formulas have already been investigated. In the present paper we find precise constants in the aforementioned approximation formulas. In order to find precise constants in asymptotical behavior of uniform approximations Laplace's method was used.

В полиномиальном случае наиболее простыми и изученными операторами приближения непрерывных функций являются частные суммы тригонометрических рядов Фурье. Вопросы, посвященные данной тематике, довольно глубоко исследованы и во многих случаях получены окончательные результаты. Естественным будет обобщение тригонометрических рядов Фурье на случай рациональной аппроксимации и нахождение им рациональных аналогов. В настоящей статье изучается асимптотическое поведение равномерных приближений функции $|\sin x|$ рациональными рядами Фурье со свободными полюсами.

Пусть $\{\alpha_k\}$ – произвольная последовательность действительных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\alpha_0 = 0,\ |\alpha_k| < 1,\ \alpha_{2k} = -\alpha_{2k+1},\ k \in \mathrm{N}_0. \tag{1}$$

Через N_0 обозначено множество $\mathrm{N} \cup \{0\}$.

Рассмотрим ортонормальную на единичной окружности $|z|=1$ систему рациональных функций $\varphi_n(z),\ n \ge 0,$ введенную независимо друг от друга С. Такенака [1] и С. Мальмквистом [2],

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1-|\alpha_0|^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-\overline{\alpha_0} z},\ \varphi_n(z) = \left(\frac{1-|\alpha_n|^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-\overline{\alpha_n} z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k} z},\ n = 1,2,3,\dots .$$

Система функций $\varphi_n(z),\ n \ge 0,$ является естественным обобщением системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\right\}_{n=0}^{\infty}$ и переходит в нее при $\alpha_k = 0,\ k \in \mathrm{N}.$ Для функции $|\sin x|$ можно записать ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(e^{ix}),\ k \in \mathrm{N}; \overline{\varphi_k(e^{ix})},\ k \in \mathrm{N}_0\}$:

$$|\sin x| \sim a_0\varphi_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \varphi_k(e^{ix}) + b_k \overline{\varphi_k(e^{ix})}\right), \tag{2}$$

где a_k, b_k – коэффициенты Фурье, т. е.

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \overline{\varphi_k\left(e^{ix}\right)} dx,\ \ k \in \mathrm{N}_0,\ \ b_k = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \varphi_k(e^{ix}) dx,\ \ k \in \mathrm{N}.$$

В силу того что α_k действительные, имеем $\overline{\varphi_k\left(e^{ix}\right)} = \varphi_k\left(e^{-ix}\right)$ и $a_k = b_k,\ k \in \mathrm{N}.$ Поэтому ряд Фурье (2) примет вид

$$|\sin x| \sim a_0\varphi_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left(\varphi_k(e^{ix}) + \varphi_k(e^{-ix})\right),$$

а его частичная сумма

$$s_{2n}(x) = a_0\varphi_0 + \sum_{k=1}^{2n+1} a_k \left(\varphi_k(e^{ix}) + \varphi_k(e^{-ix})\right).$$

Обозначим через A_{2n} множество точек $\alpha = \left(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1}\right)$, где α_k действительные и удовлетворяют условиям (1).

Пусть q – произвольное натуральное число, $0 < q < n$ и $A_{2n,2q}$ есть множество точек из A_{2n}, удовлетворяющих условию, что среди чисел $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}$ ровно q различных и кратность каждой точки равна $m = \frac{n}{q},\ n = mq,\ \alpha_{2k+1} = -\alpha_{2k},\ k \in \mathrm{N}_0.$ Положим

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) = \left\| |\sin x| - s_{2n}(x) \right\|_{C_{2\pi}},$$

$$\varepsilon_{2n,2q} = \inf_{a \in A_{2n,2q}} \varepsilon_{2n}(\alpha),$$

где $\|\cdot\|_{C_{2\pi}}$ – максимум-норма в пространстве 2π-периодических непрерывных действительных функций.

В работе [3], в частности, был рассмотрен случай одного геометрически различного полюса четной кратности и была получена следующая нижняя оценка:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^2}{\ln n} \varepsilon_{2n,2} > 0.$$

В данной работе мы рассматриваем случай произвольного количества полюсов q четной кратности и находим *порядок* асимптотического поведения $\varepsilon_{2n,2q}$. Одновременно с нахождением *порядка*, пользуясь методом Лапласа [4], мы находим *асимптотические оценки с точностью до константы* для $\varepsilon_{2n,2q}$ при $n \to \infty$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для любого фиксированного натурального числа* q *справедливо следующее равенство:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{2q}}{(\ln n)^{2q-1}} \varepsilon_{2n,2q} = \frac{q^{2q+1}}{\pi 2^{2q-2}} [(q-1)!]^2.$$

Доказательство. Случай $q = 1$ аналогичен [5]. Докажем утверждение для количества полюсов $k = q$. Рассмотрим случай, когда каждый полюс входит с четной кратностью, другими словами, $n = mq$, где m – четное натуральное число. В этом случае выражение $\varepsilon_{2n}(\alpha)$ принимает наиболее компактный вид для изучения его асимптотики, а именно, как следует из [3], имеет место соотношение

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f^m(u) \frac{du}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}},$$

где $f(u) = \prod_{j=1}^{q} \frac{u - \beta_j}{u + \beta_j}$, $\beta_j = \frac{1-\alpha_{2j}^2}{1+\alpha_{2j}^2}$. Обозначим

$$I_m(\beta) = \int_0^1 f^m(u) \frac{du}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}},$$

$$\mathrm{B}_q = \{\, \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q) \text{ при } 0 < \beta_i \le 1, 1 \le i \le q \,\}.$$

Тогда

$$\varepsilon_{2n,2q} = \frac{2}{\pi} \inf_{\beta \in \mathrm{B}_q} I_m(\beta). \tag{3}$$

Пусть $\beta \in \mathrm{B}_q$. Без ограничения общности можем считать, что $\beta_1 \ge \beta_2 \ge \ldots \ge \beta_q$. Обозначим

$$I_{1m}(\beta) = \int_0^{\beta_q} f^m(u) \frac{du}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}}, \quad I_{2m}(\beta) = \sum_{j=2}^{q} \int_{\beta_j}^{\beta_{j-1}} f^m(u) \frac{du}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}},$$

$$I_{3m}(\beta) = \int_{\beta_1}^{1} f^m(u) \frac{du}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}}.$$

Таким образом,

$$I_m(\beta) = I_{1m}(\beta) + I_{2m}(\beta) + I_{3m}(\beta).$$

Положим

$$C_1 = q, \ C_j = \frac{q}{2^{2q-2}} \prod_{k=1}^{j-1} (q-k)^2, \ j > 1, \ \beta_j(m) = C_j \left(\frac{\ln m}{m} \right)^{2j-1}, \ j = 1, 2, \ldots, q. \tag{4}$$

Лемма 1. *При* $\beta(m) = (\beta_1(m), \beta_2(m), \ldots, \beta_q(m))$, *где* $\beta_j(m)$ *удовлетворяют (4), имеет место*

$$I_m(\beta) \underset{\cap}{\cup} \frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}, \ m \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь методом Лапласа, при данном наборе $\beta = \beta(m)$ нетрудно убедиться в том, что

$$I_{1m}(\beta) \asymp \frac{1}{m\sum_{j=1}^{q} 2/\beta_j}, m \to \infty, \tag{5}$$

$$\int_{\beta_j}^{\beta_{j-1}} f^m(u) \frac{du}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}} \asymp \beta_{j-1}\sqrt[4]{\beta_j/\beta_{j-1}}\,\frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \exp\left(-4m\sqrt{\beta_j/\beta_{j-1}}\right), \tag{6}$$

$$I_{3m}(\beta) \asymp \frac{\exp(-2m\sum_{j=1}^{q}\beta_j)}{\sqrt{m\sum_{j=1}^{q}\beta_j}}, m \to \infty. \tag{7}$$

К тому же с учетом (4) имеем $4\sqrt{\frac{C_j}{C_{j-1}}} = 2q - 2j + 2, 1 < j \le q,$ и в силу (5) – (7)

$$I_{1m}(\beta) \asymp \frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}, m \to \infty,$$

$$\int_{\beta_j}^{\beta_{j-1}} f^m(u) \frac{du}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}} \asymp \left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j-3} \cdot \sqrt{\frac{\ln m}{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{m^{2q-2j+2}} = \frac{(\ln m)^{2j-5/2}}{m^{2q}}, m \to \infty,$$

$$I_{3m}(\beta) \asymp \frac{1}{m^{2q}\sqrt{q \ln m}}, m \to \infty.$$

Поэтому

$$I_m(\beta) \asymp \frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}, m \to \infty.$$

Следствие 1. Существует константа C(q), зависящая только от q, такая, что

$$\varepsilon_{2n,2q} \le C(q) \cdot \frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}.$$

Обозначим через $\beta'(m) = (\beta_1'(m), \beta_2'(m), ..., \beta_q'(m))$ набор $\beta = \beta'(m) \in \overline{B_q}$, при котором достигается инфимум в $\varepsilon_{2n,2q} = \frac{2}{\pi} \inf_{\beta \in \overline{B_q}} I_m(\beta)$ (функция $I_m(\beta)$ непрерывно зависит от β и поэтому достигает своего инфимума на компактном множестве $\overline{B_q}$). Такой набор $\beta'(m)$ назовем *оптимальным*. В следующей лемме получены некоторые сведения об асимптотическом поведении набора $\beta'(m)$ при $m \to \infty$, что позволит затем сделать заключение о том, что на самом деле $\beta'(m) \in B_q$.

Лемма 2. *Для оптимального набора* $\beta'(m)$ *справедливы следующие соотношения:*

$$\beta_1'(m) \ge C_1 \frac{\ln m}{m}, \frac{\beta_j'(m)}{\beta_{j-1}'(m)} \asymp \left(\frac{\ln m}{m}\right)^2, 1 < j \le q,$$

где C_1 *– абсолютная константа, не зависящая от* m [*].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для начала заметим, что

$$I_m(\beta) = \int_0^1 f^m(u) \frac{du}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}} > \frac{1}{2^{3/2}} \int_0^1 f^m(u)du = \frac{1}{2^{3/2}} \int_0^1 \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{u-\beta_j}{u+\beta_j}\right)^m du.$$

Положим $\beta_{q+1} = 0, \beta_j^* = \sqrt{\beta_j \beta_{j+1}}, 1 \le j \le q.$ Тогда получим

[*] Здесь и в дальнейшем через C_1, C_2, … будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от m.

$$I_m(\beta) > \frac{1}{2^{3/2}}\int_0^1 \prod_{j=1}^q \left(\frac{u-\beta_j}{u+\beta_j}\right)^m du > \frac{1}{2^{3/2}}\left(\sum_{j=1}^q \int_{\beta_j^*}^{\beta_j}\left(\frac{\beta_j-u}{\beta_j+u}\right)^{mq} du + \int_{\beta_1}^1 \left(\frac{u-\beta_1}{u+\beta_1}\right)^{mq} du\right).$$

В каждом из интегралов справа, кроме последнего, произведем замену

$$t=\frac{\beta_j-u}{\beta_j+u},\, u=\beta_j\frac{1-t}{1+t},\, du=-2\beta_j dt/(1+t)^2.$$

В последнем интеграле произведем замену

$$t=\frac{u-\beta_1}{u+\beta_1},\, u=\beta_1\frac{1+t}{1-t},\, du=2\beta_1 dt/(1-t)^2.$$

После замены получим

$$I_m(\beta) > 2\left(\sum_{j=1}^q \int_0^{t_j} t^{mq}\frac{\beta_j dt}{(1+t)^2} + \int_0^{t_0} t^{mq}\frac{\beta_1 dt}{(1-t)^2}\right),$$

$$I_m(\beta) > \frac{1}{2^{3/2}}\left(\sum_{j=1}^q \beta_j\int_0^{t_j} t^{mq}dt + \beta_1\int_0^{t_0} t^{mq}dt\right) = \frac{1}{2^{3/2}(mq+1)}\left(\beta_q + \sum_{j=1}^{q-1}\beta_j t_j^{mq+1} + \beta_1 t_0^{mq+1}\right),$$

где

$$t_j=\frac{\beta_j-\beta_j^*}{\beta_j+\beta_j^*}=1-\frac{2\sqrt{\beta_{j+1}/\beta_j}}{1+\sqrt{\beta_{j+1}/\beta_j}},\, t_0=\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}=1-\frac{2\beta_1}{1+\beta_1},\, j=1,2,...,q.$$

Принимая во внимание следствие 1, видим, что оптимальный набор $\beta'(m)$ удовлетворяет следующим условиям: для достаточно больших m

$$\frac{\beta_1' t_0^{mq+1}}{mq+1} \le C_3(q)\frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}},\, \frac{\beta_j' t_j^{mq+1}}{mq+1} \le C_2(q)\frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}},\, j=1,2,...,q. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\left(1-\frac{2\beta_1'}{1+\beta_1'}\right)^{mq+1} \le C_3(q)\frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}.$$

Получим, что

$$\beta_1'(m) \ge C_4(q)\frac{\ln m}{m}. \tag{9}$$

Аналогично, полагая $j=1$ в (8),

$$\beta_1'\left(1-\frac{2\sqrt{\beta_2'/\beta_1'}}{1+\sqrt{\beta_2'/\beta_1'}}\right)^{mq+1} \le C_2(q)\frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}.$$

Откуда вытекает, что $\dfrac{\beta_2'(m)}{\beta_1'(m)} \ge C_5(q)\left(\dfrac{\ln m}{m}\right)^2$ и для всех $1<j\le q$ имеем

$$\frac{\beta_{j+1}'(m)}{\beta_j'(m)} \ge C_j(q)\left(\frac{\ln m}{m}\right)^2. \tag{10}$$

С другой стороны, с учетом соотношения (8) имеем

$$\beta_q' \le C_2(q)\frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q-1}}.$$

Поэтому в силу того, что $\beta_q' = \dfrac{\beta_q'}{\beta_{q-1}'}\cdot\dfrac{\beta_{q-1}'}{\beta_{q-2}'}\cdot...\cdot\dfrac{\beta_2'}{\beta_1'}\cdot\beta_1'$, и в силу соотношений (9) и (10) получим, что

$$\frac{\beta_j'(m)}{\beta_{j-1}'(m)} \underset{\cap}{\cup} \left(\frac{\ln m}{m}\right)^2,\, \beta_1'(m) \underset{\cap}{\cup} \frac{\ln m}{m},\, 1<j\le q,$$

и существуют константы $C'_j, 1 \le j \le q,$ такие, что $\beta'_j(m) = C'_j \left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j-1}$, $m \to \infty.$ Лемма 1 доказана.

Из леммы 2 следует, что для оптимального набора $\beta'(m)$ существуют константы $C'_j(m), 1 \le j \le q,$ равномерно отделенные от нуля и бесконечности, такие, что

$$\beta'_j(m) = C'_j(m)\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j-1}.$$

Множество таких наборов $\beta'(m)$ обозначим через $S_{\inf}$. С помощью метода Лапласа нетрудно убедиться в том, что для $\beta \in S_{\inf}$ справедливы асимптотические соотношения (5) – (7), и, следовательно, при $m \to \infty$ имеет место соотношение

$$I_m(\beta) \sim \left(\frac{\beta_q}{2m} + \sum_{j=2}^{q} \beta_{j-1} \sqrt[4]{\beta_j / \beta_{j-1}} \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \exp\left(-4m\sqrt{\beta_j/\beta_{j-1}}\right) + \exp(-2m\beta_1) \Big/ \sqrt{m\beta_1}\right). \tag{11}$$

Завершающим этапом получения необходимой асимптотики является вычисление констант C'_j.

Лемма 3. *Для оптимального набора* $\beta'_j(m) = C'_j(m)\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j-1}$, *при котором достигается инфимум в (3), имеют место соотношения*

$$C'_1 = q + \tau_1(m),\ 4\sqrt{\frac{C'_j}{C'_{j-1}}} = 2q - 2j + 2 + \tau_j(m),\ 1 < j \le q, \tag{12}$$

где последовательности $\tau_j(m),\ 1 < j \le q,$ удовлетворяют соотношению

$$\lim_{m\to\infty} \tau_j(m) = 0.$$

Доказательство. Пусть C''_j – константы, определяемые из соотношений (12) в случае, когда $\tau_j(m) \equiv 0.$ Нетрудно убедиться в том, что $C''_j = \frac{q}{2^{2q-2}} \prod_{k=1}^{j-1} (q-k)^2, 1 < j \le q.$ Обозначим $\beta''_j(m) = C''_j \left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j-1}$ и покажем, что $\lim_{m\to\infty} \frac{\beta'_j(m)}{\beta''_j(m)} = 1.$ Для начала заметим, что для любого $1 < j \le q$ и любого $\eta > 0$ существует достаточно большое M такое, что для всех $m > M$ справедливо неравенство $\tau_j(m) > -\eta.$ Действительно, если предположить, что существует возрастающая последовательность $m_i \to \infty$ такая, что $\tau_j(m_i) < -\eta$ для некоторой не зависящей от m константы $\eta > 0,$ то, так как

$$\int_{\beta_j}^{\beta_{j-1}} f^m(u) \frac{du}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}} \mathop{\cap}^{\cup} \frac{(\ln m)^{2j-5/2}}{m^{2q-\tau_j(m)}},$$

для достаточно больших i справедливо

$$\int_{\beta_j}^{\beta_{j-1}} f^m(u) \frac{du}{(1+u)^{3/2}\sqrt{1-u}} > \frac{(\ln m_i)^{2j-5/2}}{m_i^{2q-\eta}},$$

и в силу того, что $\frac{(\ln m)^{2j-5/2}}{m^{2q-\eta}} > \frac{(\ln m)^{2q-1}}{m^{2q}}$ при достаточно больших m получаем, что $I_m(\beta') > I_m(\beta''),$ в противоречие с тем, что $\inf\limits_{\beta \in \mathrm{B}_q} I_m(\beta)$ достигается при $\beta = \beta'.$ Таким образом, для всех $1 < j \le q$

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \tau_j(m) \ge 0,$$

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} 4\sqrt{\frac{C'_j}{C'_{j-1}}} \ge 2q - 2j + 2.$$

Теперь предположим, что существует $1 < j \le q$ такое, что $\overline{\lim}_{m\to\infty} \tau_j(m) > 0.$ Тогда $\overline{\lim}_{m\to\infty} C'_q(m) > C''_q,$ и, поскольку, как следует из (11):

$$I_m(\beta') \sim C'_q \frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}, \ m \to \infty,$$

$$I_m(\beta'') \sim C''_q \frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}, m \to \infty,$$

получаем, что $I_m(\beta') > I_m(\beta'')$ в противоречие с тем, что $\inf\limits_{\beta \in \mathrm{B}_q} I_m(\beta)$ достигается при $\beta = \beta'$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \tau_j(m) = 0, \ \ 1 < j \le q.$$

Аналогично можно показать, что

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \ \tau_j(m) = 0, \ \ 1 < j \le q.$$

Таким образом, для всех $1 < j \le q$ справедливы равенства

$$\lim_{m\to\infty} \tau_j(m) = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} 4\sqrt{\frac{C'_j}{C'_{j-1}}} = 2q - 2j + 2.$$

Заметим теперь, что $\lim\limits_{m\to\infty} C'_1(m) \ge q$. Действительно, если $\beta'_1 = (q - \tau_1(m_i))\dfrac{\ln m_i}{m_i}$ для некоторой последовательности $m_i \to \infty$ такой, что $\tau_1(m_i) < -\eta$, где η – фиксированная положительная константа, то в силу (7) имеем

$$I_{3m}(\beta') \overset{\cup}{\underset{\cap}{}} \frac{\exp(-2m\beta'_1)}{\sqrt{m\beta'_1}}, m \to \infty.$$

Поэтому

$$I_{3m_i}(\beta') > \frac{1}{m_i^{2(q-\eta)}\sqrt{(q-\eta)\ln m_i}},$$

и тем самым, так как $I_m(\beta') > I_{3m}(\beta')$, для достаточно больших m получаем противоречие с тем, что в силу следствия 1 справедливо неравенство $I_m(\beta) \le C(q) \cdot \dfrac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}$ для некоторой константы $C(q)$. Таким образом, $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} C'_1(m) \ge q$. Аналогично можно показать, что $\underline{\lim\limits_{m\to\infty}} C'_1(m) \ge q$ и $\lim\limits_{m\to\infty} C'_1(m) \ge q$. Предположение $\lim\limits_{m\to\infty} C'_1(m) > q$ точно так же, как и в описанном случае, снова приводит к противоречию с тем, что $\inf\limits_{\beta \in \mathrm{B}_q} I_m(\beta)$ достигается при $\beta = \beta'$. Итак, лемма 3 доказана.

В силу леммы 3 имеем

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{\ln m}\right)^{2j-1} \beta'_j(m) = \frac{q}{2^{2q-2}} \prod_{k=1}^{j-1} (q-k)^2 \ \text{ для всех } 1 < j \le q \ \text{ и } \lim_{m\to\infty} \frac{m}{\ln m} \beta'_1 = q.$$

Из (11) следует, что $I_{1m}(\beta') = \dfrac{\beta'_q}{2m} + o\left(\dfrac{\beta'_q}{2m}\right), m \to \infty.$ Принимая во внимание (3), (11) и лемму 3, окончательно заключаем, что для $n = mq$, где m четно, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2q}}{(\ln n)^{2q-1}} \varepsilon_{2n,2q} = \frac{n^{2q}}{(\ln n)^{2q-1}} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{\frac{q}{2^{2q-2}}[(q-1)!]^2}{2} \frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}} = \frac{q^{2q+1}}{\pi 2^{2q-2}} [(q-1)!]^2,$$

и теорема 1 доказана.

Замечание 1. Заметим, что случай, когда все полюсы аппроксимирующих функций входят с одинаковой кратностью, является оптимальным. А именно, если предположить, что кратность полюса $1/\alpha_{2j}$ равна $p_j n$ для некоторых $p_j > 0$ таких, что $\sum\limits_{j=1}^{q} p_j = 1$, то аналогично легко убедиться в справедливости соотношения

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{2q}}{(\ln n)^{2q-1}} \varepsilon_{2n,2q} = \frac{q[(q-1)!]^2}{\pi 2^{2q-2}\left(p_1 p_2 ... p_q\right)^2},$$

и, заметив, что выражение $\left(p_1 p_2 ... p_q\right)^2$ принимает максимальное значение при условии $p_j > 0$, $\sum_{j=1}^{q} p_j = 1$, когда все $p_j = \frac{1}{q}$, $j = 1, 2, ..., q$, видим, что

$$\inf_{\substack{p_j>0,\\ \sum p_j=1}} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2q}}{(\ln n)^{2q-1}} \varepsilon_{2n,2q} = \frac{q^{2q+1}[(q-1)!]^2}{\pi 2^{2q-2}}.$$

Инфимум достигается, когда все полюсы входят с одинаковой четной кратностью $p_j n = \frac{n}{q}$.

Замечание 2. Оценки, полученные в работе, позволяют также для достаточно больших m вычислить главные члены асимптотического поведения при $m \to \infty$ набора аппроксимирующих полюсов частичной суммы $s_{2n}(x)$ ряда Фурье, на котором достигается наилучшее приближение. А именно при $m \to \infty$ множеством экстремальных полюсов являются выражения

$$\pm\sqrt{\frac{m^{2j-1} - C_j \ln^{2j-1} m}{m^{2j-1} + C_j \ln^{2j-1} m}} + o\left(\sqrt{\frac{m^{2j-1} - C_j \ln^{2j-1} m}{m^{2j-1} + C_j \ln^{2j-1} m}}\right), m \to \infty, \; 1 \le j \le q,$$

где

$$C_1 = q, \; C_j = \frac{q}{2^{2q-2}} \prod_{k=1}^{j-1} (q-k)^2, \; 1 \le j \le q.$$

Таким образом, оптимальные полюсы сгущаются к точкам $x = 1$ и $x = -1$ по мере того, как m стремится к бесконечности.

1. Takenaka S. // Japan. J. of Math. 1925. Vol. 2. P. 129.
2. Malmquist S. Sur la determination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donne de points: Complex rendus du sexieme congres (1925) des math. scand. Kopenhagen, 1926. P. 253.
3. Ровба Е. А. // Мат. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 52.
4. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., 1979.
5. Микулич Е. Г., Ровба Е. А. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 6.

Поступила в редакцию 21.10.10.

Евгений Геннадьевич Микулич – аспирант кафедры функций, функционального анализа, вероятностей и прикладной математики ГрГУ им. Янки Купалы. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор, ректор ГрГУ им. Янки Купалы Е.А. Ровба.