

О ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

The uniqueness and continuous dependence theorem of strong solutions of the Goursat problem for hyperbolic operator-differential equations with variable domains of the unbounded operators is proved.

Задача Гурса для гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с постоянными областями определения неограниченных операторов изучалась в [1]. В настоящей работе выведена априорная оценка, из которой следует единственность и непрерывная зависимость от правых частей уравнения и данных Гурса сильных решений на множестве значений оператора задачи Гурса в случае переменных областей определения операторных коэффициентов.

Постановка задачи. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|\cdot|$. В ограниченном прямоугольнике $T =]0, T_1[\times]0, T_2[$ плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных $t = \{t_1, t_2\}$ рассматривается гиперболическое дифференциально-операторное уравнение

$$L(t)u \equiv \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_2 \partial t_1} + A_1(t) \frac{\partial u(t)}{\partial t_1} + A_2(t) \frac{\partial u(t)}{\partial t_2} + A(t)u(t) = f(t), \quad t \in T, \quad (1)$$

с условиями Гурса

$$l_1 u \equiv u(t_1, 0) = \varphi_1(t_1), \quad l_2 u \equiv u(0, t_2) = \varphi_2(t_2), \quad (2)$$

где $\varphi_1(t_1)$ и $\varphi_2(t_2)$ – функции переменных $t_1 \in [0, T_1]$ и $t_2 \in [0, T_2]$ соответственно со значениями в H , удовлетворяющие условию согласования $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Здесь u и f – неизвестная и заданная функции двумерной переменной t со значениями в H , коэффициенты $A(t)$ и $A_i(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и $D(A_i(t))$, $i=1,2$, соответственно. Предполагается, что эти операторы удовлетворяют следующим условиям.

I. При каждом $t \in T$ операторы $A(t)$ самосопряжены и положительны в H .

II. При всех $t \in T$ операторы $A_i(t)$ подчинены квадратному корню $A^{1/2}(t)$ с областями определения $D(A^{1/2}(t))$ операторов $A(t)$ (т. е. $|A_i(t)w| \leq c_i |A^{1/2}(t)w| \forall w \in D(A^{1/2}(t))$, $c_i > 0$, $i=1,2$) и для них имеет место оценка

$$-\operatorname{Re}(A_1(t)v_1 + A_2(t)v_2, v_1 + v_2) \leq c_3 (|v_1|^2 + |v_2|^2) \quad \forall v_1, v_2 \in D(A^{1/2}(t)), c_3 \geq 0. \quad (3)$$

III. В H при всех $t \in T$ существуют ограниченные обратные операторы $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}(T, \mathcal{L}(H))$, сильно непрерывные по t [2, с. 216] и имеющие ограниченные сильные частные производные [2, с. 218] $\partial A^{-1}(t) / \partial t_i \in L_\infty(T, \mathcal{L}(H))$, $i=1,2$, такие, что справедливы оценки

$$\left| \left((\partial A^{-1}(t) / \partial t_i) g, g \right) \right| \leq c_4 (A^{-1}(t) g, g) \quad \forall g \in H, c_4 \geq 0, i=1,2. \quad (4)$$

В условиях I–III постоянные c_i , $i=1,4$, не зависят от w, v_1, v_2 и g .

Выведем априорную оценку сильных решений задачи Гурса (1), (2).

Основные понятия и обозначения. Задаче Гурса (1), (2) соответствует линейный неограниченный оператор $L \equiv \{L(t), l_1, l_2\} : E \supset D(L) \rightarrow F$, действующий из банахова пространства E , полученного замыканием множества $D(L) = \{u \in \mathcal{H} = L_2(T, H) : u \in D(A(t)), \partial u / \partial t_i \in D(A_i(t)), t \in \bar{T} = [0, T_1] \times [0, T_2]; \partial u / \partial t_i, \partial^2 u / \partial t_2 \partial t_1, A_i(t) \partial u / \partial t_i, A(t)u \in \mathcal{H}, i=1,2\}$ по норме

$$\|u\|_E = \left[\sup_{t \in \bar{T}} \sum_{i=1}^2 \int_0^{T_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_i} \right|^2 + |A^{1/2}(t)u|^2 \right) dt_i \right]^{1/2},$$

в пространство $F = \mathcal{H} \times H_1 \times H_2$ всех функций $\Phi = \{f, \varphi_1, \varphi_2\}$ таких, что $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, с нормой

$\|\Phi\|_F = \left(\|f\|_0^2 + \|\varphi_1\|_1^2 + \|\varphi_2\|_2^2 \right)^{1/2}$. Здесь $\|\cdot\|_0$ – эрмитова норма в $\mathcal{H}$, гильбертовы пространства H_i – замыкания следов функций u из множества $D(L)$ при $t_j = 0$ по эрмитовым нормам

$\|u\|_i = \left(\int_0^{T_i} \left(|\partial u / \partial t_i|^2 + |A^{1/2}(t)u|^2 \right) dt_i \right)^{1/2}, \quad j \neq i, i=1,2$. Из теорем вложения Соболева известно, что

для каждой функции $u \in D(L)$ частные производные $\partial u / \partial t_i \in C([0, T_j], L_2([0, T_i], H))$, $j \neq i, i=1,2$. Из выбора множества $D(L)$ и определения пространства E следует вложение

$$E \subset \bigcap_{j=1, j \neq i}^2 \left\{ C^{(1)}([0, T_j], L_2([0, T_i], H)) \cap B([0, T_j], L_2([0, T_i], W(t))) \right\}, \quad i=1,2, \text{ где } W(t) - \text{гильбертовы про-}$$

странства, полученные наделением областей $D(A^{1/2}(t))$ эрмитовыми нормами $|v|_{(t)} = |A^{1/2}(t)v|$, $t \in \bar{T}$.

Стандартным образом доказывается, что в предположении самосопряженности, положительной определенности операторов $A(t)$ и плотности множества $D^*(L) = \{v \in D(L) : v(t) \in D(A_i^*(t)), t \in \bar{T}, A_i^*(t)v \in \mathcal{H}, i=1,2\}$ в $\mathcal{H}$, где $A_i^*(t)$ – сопряженные операторы операторов $A_i(t)$ в H , оператор L допускает сильное замыкание $\bar{L} = \{\bar{L}(t), l_1, l_2\} : E \supset D(\bar{L}) \rightarrow F$.

Определение. Решения $u \in D(\bar{L})$ операторного уравнения $\bar{L}u = \Phi$, $\Phi \in F$, называются *сильными решениями* задачи Гурса (1), (2).

Априорная оценка сильных решений задачи Гурса. Для сильных решений задачи Гурса (1), (2) справедлива следующая априорная оценка.

Теорема 1. Пусть выполняются условия I–III и множество $D^*(L)$ плотно в $\mathcal{H}$. Тогда справедливо энергетическое неравенство (априорная оценка)

$$\|u\|_E^2 \leq c_5 \|\bar{L}u\|_F^2 \quad \forall u \in D(\bar{L}), \quad c_5 = \exp\{(T_1 + T_2) \max\{c_4, 2 + 2c_3\}\}. \quad (5)$$

Доказательство. Умножаем уравнение (1) скалярно в H на $e^{\theta(t)}(\partial u / \partial t_1 + \partial u / \partial t_2)$, где $\theta(t) = c(\tau_1 - t_1 + \tau_2 - t_2)$, $c \geq 0$, интегрируем по частям по $t \in T_\tau = [0, \tau_1] \times [0, \tau_2]$, $0 < \tau_i < T_i$, $i = 1, 2$, и для всех $u \in D(L)$ получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_{T_\tau} e^{\theta(t)} \left(L(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dt &= \sum_{i=1}^2 \int_{T_\tau} e^{\theta(t)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_i} \right) dt + \\ &+ \int_{T_\tau} e^{\theta(t)} \left(A_1(t) \frac{\partial u}{\partial t_1} + A_2(t) \frac{\partial u}{\partial t_2}, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dt + \sum_{i=1}^2 \int_{T_\tau} e^{\theta(t)} \left(A(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_i} \right) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Под знаком первой суммы правой части равенства (6) интегрируем по частям по t_j , $j \neq i$, и для всех $u \in D(L)$ имеем равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_j - t_j)} \left| \frac{\partial u}{\partial t_i} \right|_{t_j=\tau_j}^2 dt_i &= 2 \operatorname{Re} \int_{T_\tau} e^{\theta(t)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_i} \right) dt + \\ &+ \int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_j + \tau_i - t_i)} \left| \frac{\partial u}{\partial t_i} \right|_{t_j=0}^2 dt_i - c \int_{T_\tau} e^{\theta(t)} \left| \frac{\partial u}{\partial t_i} \right|^2 dt, \quad j \neq i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу оценки (3) второй интеграл правой части равенства (6) удовлетворяет неравенству

$$-2c_3 \int_{T_\tau} e^{\theta(t)} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 \right) dt \leq 2 \operatorname{Re} \int_{T_\tau} e^{\theta(t)} \left(A_1(t) \frac{\partial u}{\partial t_1} + A_2(t) \frac{\partial u}{\partial t_2}, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dt. \quad (8)$$

Под знаком второй суммы правой части равенства (6) применяем сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$, со значениями в $D(A(t))$ и их свойства [3]:

- 1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t норма $|A_\varepsilon^{-1}(t)g - g| \rightarrow 0 \quad \forall g \in H$;
- 2) в гильбертовом пространстве H при всех $t \in T$ существуют сильные производные $\partial A_\varepsilon^{-1}(t) / \partial t_i \in \mathcal{B}(T, \mathcal{L}(H))$ и верны равенства

$$\frac{\partial (A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{\partial t_i} = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t) \frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i} A(t)A_\varepsilon^{-1}(t), \quad i = 1, 2.$$

Интегрируя один раз по t_j от 0 до τ_j , находим равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_j - t_j)} \left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u \right)_{t_j=\tau_j} dt_i &= 2 \operatorname{Re} \int_{T_\tau} e^{\theta(t)} \left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_j} \right) dt + \\ &+ \int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_j + \tau_i - t_i)} \left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u \right)_{t_j=0} dt_i + \int_{T_\tau} e^{\theta(t)} \Phi_{j,\varepsilon}(u, u) dt, \quad j \neq i, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (9)$$

где ввиду свойств операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$ формы $\Phi_{j,\varepsilon}(u, u)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_{j,\varepsilon}(u, u) &= \left[\left(\frac{\partial (A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{\partial t_j} u, u \right) - c \left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u \right) \right] = \\ &= \left(\frac{\partial A(t)}{\partial t_j} A_\varepsilon^{-1}(t)u, A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u \right) - c \left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u \right). \end{aligned}$$

В силу свойств 1) и 2) сглаживающих операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$ в равенстве (9) устремляем $\varepsilon \rightarrow 0$, применяем оценки (4) и приходим к неравенствам

$$\int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_i-t_i)} \left| A^{1/2}(t)u \right|_{t_j=\tau_j}^2 dt_i \leq 2 \operatorname{Re} \int_{\tau_i} e^{\theta(t)} \left(A(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_j} \right) dt + \int_0^{\tau_i} e^{c(\tau_j+\tau_i-t_i)} \left| A^{1/2}(t)u \right|_{t_j=0}^2 dt_i + \\ + (c_4 - c) \int_{\tau_i} e^{\theta(t)} \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 dt, \quad j \neq i, j=1,2. \quad (10)$$

Складываем почленно соотношения (7), (8) и (10), используем тождество (6) и получаем следующее неравенство:

$$\int_0^{\tau_1} e^{c(\tau_1-t_1)} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|_{t_2=\tau_2}^2 + \left| A^{1/2}(t)u \right|_{t_2=\tau_2}^2 \right) dt_1 + \int_0^{\tau_2} e^{c(\tau_2-t_2)} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|_{t_1=\tau_1}^2 + \left| A^{1/2}(t)u \right|_{t_1=\tau_1}^2 \right) dt_2 \leq \\ \leq 2 \operatorname{Re} \int_{\tau_i} e^{\theta(t)} \left(L(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dt + \int_0^{\tau_1} e^{c(\tau_2+\tau_1-t_1)} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|_{t_2=0}^2 + \left| A^{1/2}(t)u \right|_{t_2=0}^2 \right) dt_1 + \\ + \int_0^{\tau_2} e^{c(\tau_1+\tau_2-t_2)} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|_{t_1=0}^2 + \left| A^{1/2}(t)u \right|_{t_1=0}^2 \right) dt_2 + (2c_3 - c) \sum_{i=1}^2 \int_{\tau_i} e^{\theta(t)} \left| \frac{\partial u}{\partial t_i} \right|^2 dt + \\ + (c_4 - c) \int_{\tau_i} e^{\theta(t)} \left| A^{1/2}(t)u \right|^2 dt.$$

Здесь используем неравенство Коши – Буняковского, элементарные преобразования и оценки, при $c = \max \{c_4, 2 + 2c_3\}$ отбрасываем неположительные слагаемые, берем точную верхнюю грань по $\tau = \{\tau_1, \tau_2\} \in T$ и получаем неравенство (5) для гладких решений $u \in D(L)$ задачи Гурса (1), (2). Затем это неравенство распространяется предельным переходом на все ее сильные решения $u \in D(\bar{L})$. Теорема доказана.

Теорема единственности сильных решений задачи Гурса. О единственности и непрерывной зависимости сильных решений исходной задачи Гурса идет речь в следующей теореме.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1 задача Гурса (1), (2) имеет единственные сильные решения $u \in E$ на множестве значений $R(\bar{L})$ оператора $\bar{L}$ и они удовлетворяют априорной оценке (5).

Утверждение теоремы 2 справедливо, так как из априорной оценки (5) следует равенство $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$, где $\overline{R(L)}$ – замыкание в F множества значений $R(L)$ оператора L .

Замечание. С помощью определения сильных решений $u \in D(\bar{L})$ задачи Гурса (1), (2) можно показать, что каждое из них является непрерывной функцией переменных $\{t_1, t_2\} \in \bar{T}$ со значениями в H . Таким образом, сильные решения задачи Гурса (1), (2) непрерывно примыкают к данным Гурса $\varphi_1(t_1)$ и $\varphi_2(t_2)$ в $C(\bar{T}, H)$.

1. Бриш Н.И., Юрчук Н.И. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 6. С. 1017.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
3. Ломовцев Ф.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 1. С. 34.

Поступила в редакцию 19.06.10.

Антон Викторович Мотевич – аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики Ф.Е. Ломовцев.