УДК 517.95

Н.А. ХАТИМЦОВ

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

The uniqueness theorem of strong solutions of the boundary problems for hyperbolic even-order operator-differential equations with variable domains of operator coefficients under two nonlocal boundary conditions is proved.

Единственность сильных решений нелокальной задачи для гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со стационарным операторным коэффициентом установлена в [1] и с переменной областью определения операторного коэффициента – в [2]. Двухточечные граничные задачи для двучленных и полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с зависящими от времени областями определения операторных коэффициентов были изучены при локальных граничных условиях в [3] и [4] соответственно. В настоящей работе впервые доказывается теорема единственности сильных решений двухточечной граничной задачи для двучленных дифференциально-операторных уравнений четных порядков в случае двух нелокальных граничных условий, которые никем не рассматривались даже при не зависящих от времени областях определения операторных коэффициентов.

Постановка задачи. На ограниченном интервале $]0,T[$ задаются гиперболические дифференциально-операторные уравнения

$$\mathcal{L}_m(t)u \equiv (-1)^{m-1}\frac{d^{2m}u(t)}{dt^{2m}} + A(t)u(t) = f(t),\ t\in]0,T[, \tag{1}$$

к которым присоединены нелокальные граничные условия

$$\begin{gathered} l_0u \equiv u(0) - \mu\, u(T) = \varphi, \\ d^iu(0)/dt^i = d^iu(T)/dt = 0,\ i=\overline{1,m-1}, \\ l_mu = d^mu(0)/dt^m - \mu\, d^mu(T)/dt^m = \psi,\ |\mu|<1,\ m=1,2,\ldots . \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь u, f – абстрактные функции, принимающие значения в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$, а μ – комплексный параметр нелокальности. При каждом $t\in[0,T]$ коэффициенты $A(t): H\supset D(A(t))\to H$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$, удовлетворяющие следующим условиям.

A1. При каждом $t\in[0,T]$ операторы $A(t)$ на $D(A(t))$ самосопряжены и положительны в гильбертовом пространстве H.

A2. При всех $t\in[0,T]$ существуют ограниченные обратные операторы $A^{-1}(t)$ к операторам $A(t)$, сильно непрерывные по t в H и имеющие в H ограниченную сильную производную [5] $dA^{-1}(t)/dt\in B([0,T],\ \mathcal{L}(H))$, для которой выполняется неравенство

$$-\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}g, g\right) \le c_1(A^{-1}(t)g,g)\ \forall g\in H,\ c_1\ge 0. \tag{3}$$

A3. Существуют банахово пространство V и независящий от t линейный ограниченный оператор $\tilde{A}: V\to H$ такие, что при каждом $t\in[0,T]$ верны вложения $D(A(t))\subset V\subset H$ и операторы $A(t)$ являются сужениями оператора $\tilde{A}$ на $D(A(t))$, т. е. $\tilde{A}u = A(t)u\ \ \forall u\in D(A(t)),\ t\in[0,T]$.

В этих предположениях исследуется единственность сильных решений нелокальных двухточечных граничных задач (1), (2).

Выбор пространств и определение сильных решений. Нелокальные задачи (1), (2) порождают линейные неограниченные операторы $L_m \equiv \{\mathcal{L}_m(t), l_0, l_m\}: E^m\supset D(L_m)\to F^m$ с плотными областями определения

$$D(L_m) = \left\{u\in\mathcal{H}: u\in D(A(t)),\ t\in[0,T];\frac{d^iu}{dt^i},\ A(t)u\in\mathcal{H},\ i=\overline{1,2m};\right.$$
$$\left.\frac{d^iu(0)}{dt^i} = \frac{d^iu(T)}{dt^i} = 0,\ i=\overline{1,m-1}\right\},$$

где $\mathcal{H} = L_2(]0,T[,H)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$. Здесь пространствами сильных решений задач (1), (2) являются банаховы пространства E^m – замыкания множеств $D(L_m)$ по нормам

$$\|u\|_{E^m} = \theta(\mu)\left(\left\|\frac{d^mu}{dt^m}\right\|_0^2 + \left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2\right) + \left|A^{1/2}(0)\left[u(0)-\mu u(T)\right]\right|^2 + \left|\frac{d^mu(0)}{dt^m} - \mu\frac{d^mu(T)}{dt^m}\right|^2,$$

где множитель $\theta(\mu) = (1-|\mu|^2)^2(1+|\mu|^2)^{-1}/2$. В силу известных теорем вложения Соболева имеет место вложение $E^m\subset C^{(m-1)}([0,T],H)\cap L_2(]0,T[,W(t))$. Известно [5], что при каждом $t\in[0,T]$ для операторов $A(t)$ определена дробная степень $A^{1/2}(t)$ с областями определения $D(A^{1/2}(t))$. Наделяя области определения $D(A^{1/2}(t))$ эрмитовыми нормами $|v|_{(t)} = |A^{1/2}(t)v|$, получаем гильбертовы пространства $W(t)$, $t\in[0,T]$. По определению пространства E^m его функции $u(t)$ имеют значения следов $u(0)-\mu u(T)\in W(0)$ и $(d^mu(0)/dt^m) - \mu(d^mu(T)/dt^m)\in H$.

Обозначим через

$$\mathcal{H}_0^{m-1}=\left\{v\in\mathcal{H}:\frac{d v^k}{dt^k}\in\mathcal{H},k=\overline{1,m-1};\ \frac{dv^i(0)}{dt^i}=\frac{dv^i(T)}{dt^i}=0,\ i=\overline{0,m-2}\right\}$$

гильбертовы пространства с эрмитовыми нормами $\|v\|_{m-1}=\left\|d^{m-1}v/dt^{m-1}\right\|_0$, эквивалентными нормам $|||\,v\,|||_{m-1}=\left(\sum_{i=0}^{m-1}\left\|d^iv/dt^i\right\|_0^2\right)^{1/2}$. Пусть рефлексивные банаховы пространства $\mathcal{H}^{-(m-1)}$ – замыкания множества $\mathcal{H}$ по негативным нормам $\|f\|_{-(m-1)}=\sup\limits_{v\in\mathcal{H}_0^{m-1}}\left|(f,v)_0\right|/\|v\|_{m-1}$. Они являются антидвойственными пространствами к гильбертовым пространствам $\mathcal{H}_0^{m-1}$.

Пространствами правых частей $\mathcal{F}=\{f(t),\varphi,\psi\}$ граничных задач (1), (2) будут банаховы пространства $F^m=\mathcal{H}^{-(m-1)}\times W(0)\times H$, наделенные нормами

$$\|\mathcal{F}\|_{F^m}=\left[T\zeta_m^2(\mu)\|f\|_{-(m-1)}^2+|\varphi|_{(0)}^2+|\psi|^2\right]^{1/2},$$

где $\zeta_m(\mu)=\left[4(1-|\mu|^2)+m^2-3m+2\right]^{1/2}$.

Согласно следующей лемме линейные операторы L_m допускают сильные замыкания $\overline{L}_m$ в произведениях пространств $E^m\times F^m$.

Лемма 1. *Если выполняется условие A1 и пространства* $\mathcal{D}_0^m=\{v\in\mathcal{H}_0^{m-1}:$ $v\in D(A(t));\ A(t)v,d^mv/dt^m\in\mathcal{H};\ d^{m-1}v(0)/dt^{m-1}=d^{m-1}v(T)/dt^{m-1}=0\}$ *плотны в* $\mathcal{H}_0^{m-1}$, *то для операторов* L_m *существуют сильные замыкания* $\overline{L}_m:E^m\supset D(\overline{L}_m)\to F^m$.

Доказательство. По критерию замыкаемости линейных операторов убедимся в том, что если $u_n\in D(L_m)$, $\|u_n\|_{E^m}\to 0$ и $\|L_mu_n-\mathcal{F}_0\|_{F^m}\to 0$ при $n\to\infty$, то $\mathcal{F}_0=\{f_0,\varphi_0,\psi_0\}=0$. Из непрерывности операторов следа $l_0:E^m\to W(0)$ и $l_m:E^m\to H$ выводим, что $\varphi_0=0$, $\psi_0=0$. Осталось доказать, что $f_0=0$.

Интегрируем по частям m раз по t от 0 до T и для $\forall v\in\mathcal{D}_0^m$ имеем

$$f_0(v)=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^T\left((-1)^{m-1}\frac{d^{2m}u_n}{dt^{2m}},v\right)dt+\int_0^T(A(t)u_n,v)dt\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[-\int_0^T\left(\frac{d^mu_n}{dt^m},\frac{d^mv}{dt^m}\right)dt+\int_0^T(A^{1/2}(t)u_n,A^{1/2}(t)v)dt\right]=0,$$

так как $u_n\to 0$ в E^m при $n\to\infty$. Отсюда заключаем, что $f_0=0$ в пространствах $\mathcal{H}^{-(m-1)}$, потому что множества $\mathcal{D}_0^m$ плотны в $\mathcal{H}_0^{m-1}$. Лемма 1 доказана.

Функцию $u\in E^m$ относим к областям определения $D(\overline{L}_m)$ замыканий $\overline{L}_m$, если существуют последовательность $u_n\in D(L_m)$ и элемент $\mathcal{F}\in F^m$ такие, что $\|u_n-u\|_{E^m}\to 0$ и $\|L_mu_n-\mathcal{F}\|_{F^m}\to 0$, когда $n\to\infty$. В этом случае полагаем $\overline{L}_m\,u=\lim\limits_{n\to\infty}L_mu_n=\mathcal{F}$.

Определение. Решения $u\in D(\overline{L}_m)$ операторных уравнений $\overline{L}_m\,u=\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\in F^m$, $m=1,2,...$, называются *сильными решениями* граничных задач (1), (2).

Априорная оценка сильных решений. Выведем априорную оценку сильных решений задач (1), (2), из которой следует непрерывная зависимость этих решений от f, φ, ψ из множеств значений $R(\overline{L}_m)$ операторов $\overline{L}_m$.

Теорема 1. *Если выполняются предположения леммы 1, условия A2, A3, верно вложение* $D(A(T))\subset D(A(0))$ *и* $T<1/(2c_1)$, *то для всех* $|\mu|^2<1-2Tc_1$ *справедливо неравенство (априорная оценка)*

$$\|u\|_{E^m}^2\le\left(1-2Tc_1(1-|\mu|^2)^{-1}\right)^{-1}(2T+1)\left\|\overline{L}_mu\right\|_{F^m}^2\quad\forall u\in D(\overline{L}_m).\tag{4}$$

Доказательство проведем с помощью сглаживающих операторов $A_\varepsilon^{-1}(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$. Известны их следующие свойства из [4]:

1. Равномерно по t при $\varepsilon \to 0$ норма $\left|A_\varepsilon^{-1}(t)g - g\right| \to 0$, $\forall g \in H$.

2. При почти всех $t \in]0,T[$ в H существует сильная производная $dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0,T[, \mathcal{L}(H))$ и для $\forall \varepsilon > 0$ верно равенство

$$\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt} = -A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)A_\varepsilon^{-1}(t). \tag{5}$$

Интегрируем по частям один раз по t от 0 до T и имеем тождество

$$\int_0^T \gamma(t)\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, \frac{du}{dt}\right)dt = \gamma(t)\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u\right)\Big|_0^T + \int_0^T \left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u\right)dt -$$
$$-\int_0^T \gamma(t)\left(\frac{d\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\right)}{dt}u, u\right)dt - \int_0^T \gamma(t)\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{du}{dt}, u\right)dt, \ \forall u \in D(L_m),$$

где $\gamma(t) = 2T\left(1-|\mu|^2\right)^{-1} - t$. В последнем тождестве пользуемся формулой (5), затем переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$ и выводим тождество

$$\begin{gathered}\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2 = 2\operatorname{Re}\int_0^T \gamma(t)\left(A(t)u, \frac{du}{dt}\right)dt + \gamma(t)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\Big|_{t=T}^{t=0} - \\ -\int_0^T \gamma(t)\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)u, A(t)u\right)dt, \ \forall u \in D(L_m).\end{gathered} \tag{6}$$

Интегрируем по частям $m-1$ раз по t от 0 до T и получаем тождество

$$(2m-1)\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2 = \gamma(t)\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|^2\Bigg|_{t=T}^{t=0} + (-1)^{m-1}2\operatorname{Re}\int_0^T \gamma(t)\left(\frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}, \frac{du}{dt}\right)dt, \ \forall u \in D(L_m). \tag{7}$$

Складываем почленно тождества (6) и (7) и находим тождество

$$\begin{gathered}(2m-1)\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2 + \left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2 = \gamma(t)\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|^2\Bigg|_{t=T}^{t=0} + \gamma(t)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\Big|_{t=T}^{t=0} + \\ +2\operatorname{Re}\int_0^T \gamma(t)\left(\mathcal{L}_m(t)u, \frac{du}{dt}\right)dt - \int_0^T \gamma(t)\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)u, A(t)u\right)dt, \ \forall u \in D(L_m).\end{gathered} \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть для некоторой функции* $g \in \mathcal{H}$ *выполняется равенство* $g|_{t=0} - \mu g|_{t=T} = \varphi$. *Тогда для* $|\mu| < 1$ *справедлива оценка*

$$|g(0)|^2 - \frac{1+|\mu|^2}{2}|g(T)|^2 \le \frac{1+|\mu|^2}{1-|\mu|^2}|\varphi|^2. \tag{9}$$

Если для оператора $A(t)$ *выполняются условия A1 и A3 и верно вложение* $D(A(T)) \subset D(A(0))$, *то для* $\varphi \in D(A(0))$ *справедлива оценка*

$$\left|A^{1/2}(0)g(0)\right|^2 - \frac{1+|\mu|^2}{2}\left|A^{1/2}(T)g(T)\right|^2 \le \frac{1+|\mu|^2}{1-|\mu|^2}|\varphi|_{(0)}^2, \ \forall g \in L_2\left(]0,T[, D(A(t))\right). \tag{10}$$

Доказательство оценки (9) приведено в [1]. Докажем оценку (10). В силу условий A1, A3 и равенства $\mu g(T) = \varphi - g(0)$ имеем соотношения

$$-|\mu|^2\left|A^{1/2}(T)g(T)\right|^2 = -|\mu|^2(A(T)g(T), g(T)) = -(\tilde{A}\mu g(T), \mu g(T)) =$$
$$= -(\tilde{A}\varphi - \tilde{A}g(0), \varphi - g(0)) = -(\tilde{A}\varphi, \varphi) + (\tilde{A}\varphi, g(0)) + (\tilde{A}g(0), \varphi) - (\tilde{A}g(0), g(0)) =$$
$$= -(A(0)\varphi, \varphi) + (A(0)\varphi, g(0)) + (A(0)g(0), \varphi) - (A(0)g(0), g(0)) =$$
$$= -\left|A^{1/2}(0)\varphi\right|^2 + 2\operatorname{Re}(A^{1/2}(0)\varphi, A^{1/2}(0)g(0)) - \left|A^{1/2}(0)g(0)\right|^2 \le$$
$$\le (\varepsilon - 1)\left|A^{1/2}(0)g(0)\right|^2 + (\varepsilon^{-1} - 1)\left|A^{1/2}(0)\varphi\right|^2, \forall \varepsilon > 0.$$

Здесь полагаем $\varepsilon = (1-|\mu|^2)(1+|\mu|^2)^{-1}$ и находим оценку (10). Лемма 2 доказана.

В правой части тождества (8) применяем оценку (3) и оценки (9) и (10) леммы 2 соответственно при $g = d^m u / dt^m$ и $g = u$ и получаем неравенство

$$\begin{gathered}(2m-1)\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2 + \left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2 \le 2\operatorname{Re}\int_0^T \gamma(t)\left(\mathcal{L}_m(t)u, \frac{du}{dt}\right)dt + \\ + \frac{2T}{1-|\mu|^2}\frac{1+|\mu|^2}{1-|\mu|^2}\left(|\varphi|_{(0)}^2 + |\psi|^2\right) + \frac{2Tc_1}{1-|\mu|^2}\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2.\end{gathered} \tag{11}$$

Оценим сверху первый интеграл в правой части неравенства (11)

$$\begin{gathered}2\operatorname{Re}\int_0^T \gamma(t)\left(\mathcal{L}_m(t)u, \frac{du}{dt}\right)dt = 2\operatorname{Re}\frac{\int_0^T\left(\mathcal{L}_m(t)u, \gamma(t)\frac{du}{dt}\right)dt}{\left\|\gamma(t)\frac{du}{dt}\right\|_{m-1}}\left\|\gamma(t)\frac{du}{dt}\right\|_{m-1} \le \\ \le 2\sup_{v\in\mathcal{H}_0^{m-1}}\frac{\left|\left(\mathcal{L}_m(t)u, v\right)_0\right|}{\|v\|_{m-1}}\left\|\gamma(t)\frac{du}{dt}\right\|_{m-1} \le 2\left\|\mathcal{L}_m(t)u\right\|_{-(m-1)}\left[\left\|\gamma(t)\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2 - \right. \\ \left. -2(m-1)\operatorname{Re}\left(\gamma(t)\frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}\right)_0 + (m-1)^2\left\|\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}\right\|_0^2\right]^{1/2} = \\ = 2\left\|\mathcal{L}_m(t)u\right\|_{-(m-1)}\left[\left\|\gamma(t)\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2 - (m-1)\left\|\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}\right\|_0^2 + (m-1)^2\left\|\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}\right\|_0^2\right]^{1/2} \le \\ \le 2T\left\|\mathcal{L}_m(t)u\right\|_{-(m-1)}\left[4(1-|\mu|^2)^{-2} + m^2 - 3m + 2\right]^{1/2}\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0.\end{gathered}$$

Отсюда имеем оценку

$$2\operatorname{Re}\int_0^T\left(\mathcal{L}_m(t)u, \gamma(t)\frac{du}{dt}\right)dt \le 2T\left\|\mathcal{L}(t)u\right\|_{-(m-1)}\zeta_m(\mu)\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0. \tag{12}$$

В правой части неравенства (11) пользуемся оценкой (12) и приходим к неравенству

$$\begin{gathered}(2m-1)\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2 + \left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2 \le 2T\left\|\mathcal{L}(t)u\right\|_{-(m-1)}\zeta_m(\mu)\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0 + \\ + T\theta^{-1}(\mu)\left(|\varphi|_{(0)}^2 + |\psi|^2\right) + \frac{2Tc_1}{1-|\mu|^2}\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2,\end{gathered}$$

из которого следует неравенство

$$\begin{gathered}(2m-1)\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2 + \left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2 \le T\delta^{-1}\theta(\mu)\left\|\mathcal{L}_m(t)u\right\|_{-(m-1)}^2 + T\delta\zeta_m^2(\mu)\theta^{-1}(\mu)\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2 + \\ + T\theta^{-1}(\mu)\left(|\varphi|_{(0)}^2 + |\psi|^2\right) + \frac{2Tc_1}{1-|\mu|^2}\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2, \ \forall\delta > 0.\end{gathered}$$

В этом неравенстве полагаем $\delta = \delta_0 = \dfrac{(1-|\mu|^2)(4m-3) + 2Tc_1}{2\theta^{-1}(\mu)(1-|\mu|^2)\zeta_m^2(\mu)T}$ и имеем оценку

$$\begin{gathered}\left(2m-1-T\delta_0\zeta_m^2(\mu)\theta^{-1}(\mu)\right)\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2 + \left(1 - \frac{2Tc_1}{1-|\mu|^2}\right)\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2 \le \\ \le T\left[\delta_0^{-1}\theta(\mu)\left\|\mathcal{L}_m(t)u\right\|_{-(m-1)}^2 + \theta^{-1}(\mu)\left(|\varphi|_{(0)}^2 + |\psi|^2\right)\right].\end{gathered} \tag{13}$$

Из предположений теоремы на μ и T следует, что $\delta_0 > 0$.

Умножаем оценку (13) на $2\theta(\mu)$, проводим элементарные оценки и приходим к неравенству

$$\left(1-\frac{2Tc_1}{1-|\mu|^2}\right)\theta(\mu)\left(\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2+\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2\right)\le$$
$$\le 2T\left[\delta_0^{-1}\theta^2(\mu)\left\|\mathcal{L}_m(t)u\right\|_{-(m-1)}^2+\left(|\varphi|_{(0)}^2+|\psi|^2\right)\right],\ \forall u\in D(L_m). \tag{14}$$

К левой и правой частям неравенства (14) прибавляем нормы операторов l_0 и l_m в соответствующих им пространствах и получаем неравенство

$$\left(1-\frac{2Tc_1}{1-|\mu|^2}\right)\left[\theta(\mu)\left(\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|_0^2+\left\|A^{1/2}(t)u\right\|_0^2\right)+|l_0u|_{(0)}^2+|l_mu|^2\right]\le$$
$$\le 2T\left[\delta_0^{-1}\theta^2(\mu)\left\|\mathcal{L}_m(t)u\right\|_{-(m-1)}^2+\left(|\varphi|_{(0)}^2+|\psi|^2\right)\right]+\left(1-\frac{2Tc_1}{1-|\mu|^2}\right)\left(|\varphi|_{(0)}^2+|\psi|^2\right),$$

из которого элементарными преобразованиями выводится оценка (4). Полученная оценка (4) для гладких решений $u\in D(L_m)$ распространяется предельным переходом на все сильные решения $u\in D(\overline{L}_m)$. Теорема 1 доказана.

Следствие. В предположениях теоремы 1 имеет место равенство $R(\overline{L}_m)=\overline{R(L_m)}$, *где* $\overline{R(L_m)}$ *– замыкания в F множеств значений* $R(L_m)$ *операторов* L_m, $m=1,2,\ldots$.

Теорема 2. *Пусть выполняются требования теоремы 1. Для всех* $\mathcal{F}\in R(\overline{L}_m)$ *сильные решения* $u\in D(\overline{L}_m)$ *нелокальных граничных задач (1), (2) существуют и единственны.*

Доказательство следует из линейности операторов L_m и оценки (4).

1. Чесалин В.И., Юрчук Н.И. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1973. № 6. С. 30.
2. Хатимцов Н.А. Сборник работ 65-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ: в 3 ч. Мн., 2008. Ч. 2. С. 83.
3. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 8. С. 1412.
4. Ломовцев Ф.Е. // Там же. 2005. Т. 41. № 2. С. 258.
5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.

Поступила в редакцию 19.06.10.

Никита Анатольевич Хатимцов – аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики Ф.Е. Ломовцев.